Περιεχόμενα

Άλγεβρα

Γεωμετρία

Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Θέμα 2ο

15011.α) i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15 , οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15 , δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία 20x €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία 50y €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x + 50y = 480$.

β) $\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 750 - 50x = 480 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = -270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - 9 = 6 \\ x = 9 \end{cases}$

Σύμφωνα με την εκφώνηση x = 9 είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και y = 6 τα χαρτονομίσματα των 50 €.

15016.α) Το σημείο (0,4) είναι λύση του συστήματος, αν και μόνο αν:
$\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8 \\ 2 \cdot 0 - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 8 \\ -4 = 3 \text{ αδύνατο} \end{cases}$.

Άρα δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος .

β)
$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(2x - 3) = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4x - 6 = 8 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 7x = 14 \\ 2x - 3 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases}$. Λύση του συστήματος είναι το

$(x, y) = (2, 1)$.

γ) Το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ έχει συντεταγμένες που αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, άρα το σημείο τομής τους είναι το (2,1).

15849.α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι y = x + 5 (1). Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι 12x και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι 6y. Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: 12x + 6y = 300 (2)
Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ.

β) $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6(x + 5) = 300 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6x + 30 = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 18x = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 + 5 = 20 \\ x = 15 \end{cases}$

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

18431.α) Για $k = 2$ είναι $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 22 \\ 6x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow 22 = 8$

αδύνατο.

β) Για $k = 1$ είναι $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ -6x - y = -8 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1$ και

$-3 + y = 11 \Leftrightarrow y = 14$

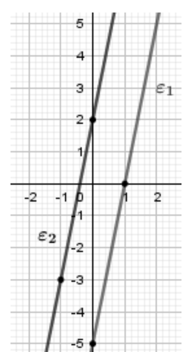
21227.α) $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \ (1) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 0 = 7$ αδύνατο.

β) Για την ευθεία (ε_1): $5x - y = 5$ έχουμε:

x	0	1
y	-5	0

Για την ευθεία (ε_2): $-5x + y = 2$ έχουμε:

x	0	-1
y	2	-3



Οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο, που γραφικά εκφράζει ότι το σύστημα του α) ερωτήματος είναι αδύνατο

31570.α) Οι συντεταγμένες του Μ είναι η λύση του συστήματος:

$\begin{cases} 2x+y=6 \ (1) \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=12 \\ x-2y=-2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 5x=10 \Leftrightarrow x=2$ και από την (1):

$4+y=6 \Leftrightarrow y=2$, άρα Μ(2,2).

β) Η $\varepsilon_3: 3x+y=8$ διέρχεται από το Μ όταν $3\cdot 2+2=8 \Leftrightarrow 6+2=8$ ισχύει

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

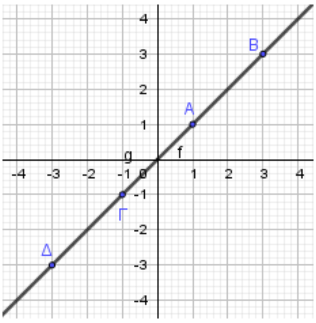
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 2ο

14976.α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.
Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων O (0,0).
Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων O (0,0). Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

β) Επειδή η C_2 είναι η άρτια ισχύει ότι $f(-2)=f(2) \Leftrightarrow k=2$.
Επειδή η C_4 είναι η περιττή ισχύει ότι $f(-2)=-f(2) \Leftrightarrow k=-2$.

14971.α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού $f(1)=1\neq 3=f(3)$
Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού 1<3 και $f(1)<f(3)$.
β) Επειδή η f είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
Επειδή διέρχεται από τα Α,Β θα διέρχεται και από τα σημεία $\Gamma(-1,-1)$ και $\Delta(-3,-3)$ που είναι τα συμμετρικά των Α, Β αντίστοιχα ως προς την αρχή O των αξόνων.



15019.α) Αν η f ήταν άρτια τότε θα ήταν $f(-1)=f(1) \Leftrightarrow 2=0$ που είναι άτοπο.
β) Αν η f ήταν περιττή τότε θα ήταν $f(-1)=-f(1) \Leftrightarrow 2=0$ που είναι άτοπο.
γ) Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε θα ήταν $f(-1)<f(1) \Leftrightarrow 2<0$ που είναι άτοπο.

15024.α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση την συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y , που σημαίνει ότι είναι άρτια.
β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [- 2,0] και στο [2, 4] και γνησίως φθίνουσα στο [- 4,- 2] και στο [0, 2].
γ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.

15112.α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-2,-1]$ και $[1,2)$.

γ) Η f έχει μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=2$ και ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1)=-2$.

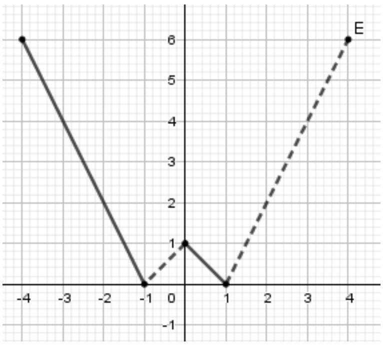
15114.α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(1, 2) και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 9)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1<2 \Leftrightarrow f(1)<f(2)$ αφού $f(1)=2$ και $f(2)=9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η i. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο (1, 2), η i. είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

15115.α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,3)$ και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο Β(2, 5), διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει $-1<2 \Leftrightarrow f(-1)>f(2) \Leftrightarrow 3>5$ που είναι άτοπο.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η ii. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο (–1,3), η ii. είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

15116.α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον y΄ y άξονα.
Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.



β) i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4,-1]$ και $[0,1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y

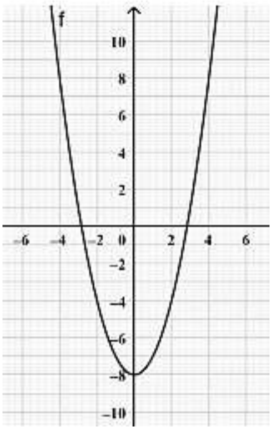
ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές –4 και 4.

15349.α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y 'y, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x,f(x))$ και $(-x,f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y 'y. Από το σχήμα έχουμε ότι
$f(-x)=f(x)$ για κάθε x ∈ Δ, άρα η συνάρτηση είναι άρτια .

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-\sqrt{2}]$, $[0,\sqrt{2}]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-\sqrt{2},0]$ και $[\sqrt{2},+\infty)$.

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$ ή $x=2$

15372.α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα y΄y. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η διπλανή γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



β) i. Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το -8 για x=0

15437.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$, άρα

$$A_f = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι: Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν x = 2.

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

15645.α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος 1m όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη 1 , δηλαδή τις χρονικές στιγμές 1min και 5min .

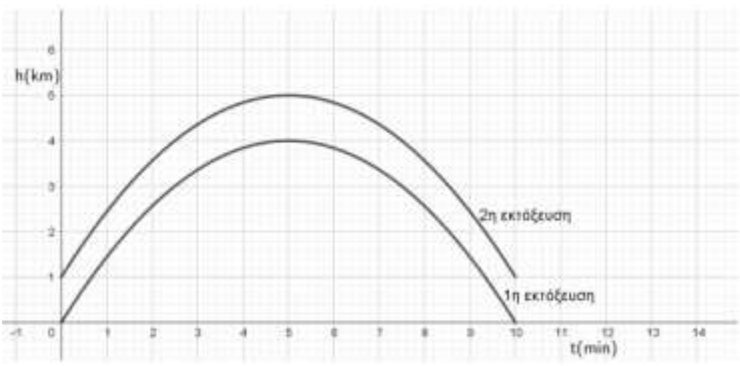
β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι 2m . Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή t = 3min .

γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα [0,3].

15787.α) i) Από το σχήμα βλέπουμε πως ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι 10 min.

ii) Από το σχήμα βλέπουμε ότι η συνάρτηση του ύψους παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 5$ min το $h(5) = 4$ km

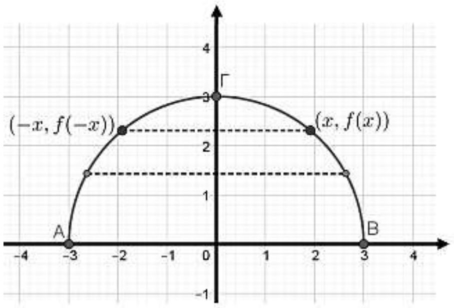
β) i) Η νέα συνάρτηση είναι η $g(t) = h(t) + 1$ άρα η γραφική της παράσταση είναι κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα πάνω της h.



ii) Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 5$ min το $g(5) = 5$ km.

16129.α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από −3 έως 3. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta = [-3,3]$.

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y′y, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y′y. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε x ∈ Δ, άρα η συνάρτηση είναι άρτια .



γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η x = 0. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι x = 3 και x = – 3.

21164. Δίνεται το σημείο $A(-2,8)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης f.

α) Η f είναι περιττή οπότε στη γραφική της παράσταση ανήκει το σημείο με συντεταγμένες $B(2,-8)$, το οποίο είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή των αξόνων.

β) Είναι $x_A = -2 < x_B = 2$, $y_A = 8 > y_B = -8$ και η f είναι γνησίως μονότονη οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 4ο

15022.α) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-1) = f(1)$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1) < f(2)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$ και 1 < 2, είναι $f(1) < f(2)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$, για κάθε $0 \le x \le 3$ είναι $f(0) \le f(x) \le f(3) \Leftrightarrow f(3) \ge f(x) \ge f(0)$ (1)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3,0]$, για κάθε $-3 \le x \le 0$ είναι $f(-3) \ge f(x) \ge f(0)$ (2).

Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-3) = f(3)$, οπότε η (2) γίνεται: $f(3) \ge f(x) \ge f(0)$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει ότι $f(3) \ge f(x) \ge f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

γ) Επειδή $f(x) \ge f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 0 το $f(0)$.

Επειδή $f(x) \le f(3)$ και $f(x) \le f(-3)$ για κάθε $x \in [-3,3]$, η f παρουσιάζει μέγιστο στα $x = 3$ και $x = -3$ το $f(-3) = f(3)$.

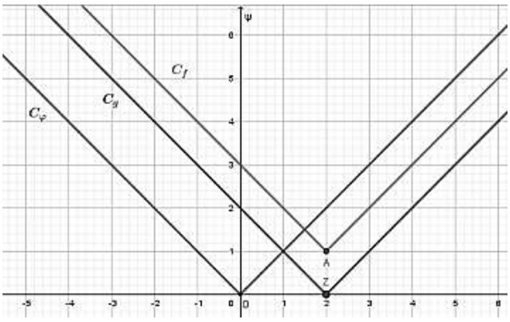
δ) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[-3,3]$, ο τύπος της θα είναι ο α ή ο β.
Στην α είναι $f(0)=3$ και $f(3)=0$, δηλαδή $f(0)>f(3)$ που είναι άτοπο.
Άρα ο β είναι ο τύπος της f.

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

Θέμα 2ο

14972.α) Οι γραφικές παραστάσεις των και προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της :

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
- μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).

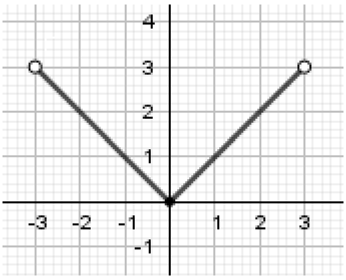


Έτσι προκύπτουν οι διπλανές γραφικές παραστάσεις
β) i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.
ii. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=1$.

14983.α) Σωστή απάντηση είναι η (iii).
β) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη δυνατή τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο αριθμός 1 και
επιτυγχάνεται όταν x = 3.
γ) Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$.

15017.α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (α,3) είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε $x\in(\alpha,3)$ και $-x\in(\alpha,3)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν α = -3.

β)Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2,2)$, είναι $f(2)=2$. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-2)=f(2)=2$.
γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

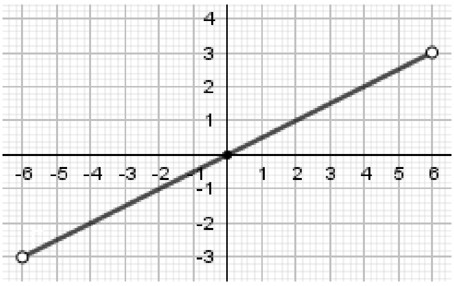


15018.α) Αφού η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα (α,6) είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε $x\in(\alpha,6)$ και $-x\in(\alpha,6)$. Αυτό ισχύει μόνο όταν α = -6.

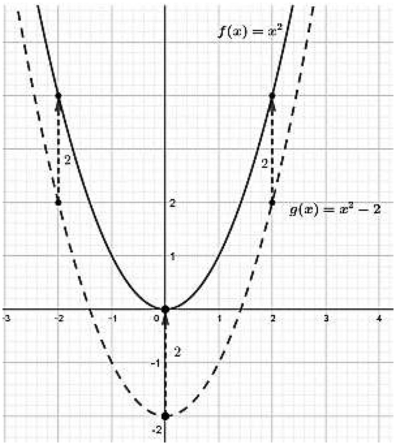
β) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4,2)$, είναι $f(4)=2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-4)=-f(4)=-2$.

γ) Επειδή η f είναι περιττή, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

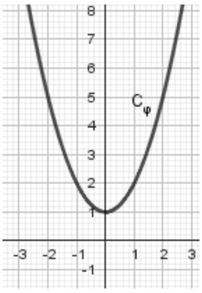


15811.α) i. Η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική ως προς τον y΄y άξονα, άρα η g είναι άρτια.
ii. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση x = 0 , το g(0) = – 2, διότι όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση, $g(x)\geq -2$ και η ισότητα ισχύει για x = 0 .
β) Η γραφική παράσταση της $f(x)=x^2=g(x)+2$ προκύπτει με κατακόρυφη και προς τα πάνω μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 2 μονάδες.



20671.α) i. Η f είναι άρτια γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον y΄y άξονα.
ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή ίση με 1 για x = 0 , αφού, όπως φαίνεται στο σχήμα, f (0)= 1 και
$f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) i. Η γραφική παράσταση της g προέκυψε με οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες δεξιά.
ii. Σύμφωνα με το βi), ο τύπος της g είναι
$$g(x)=f(x-2)=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$$

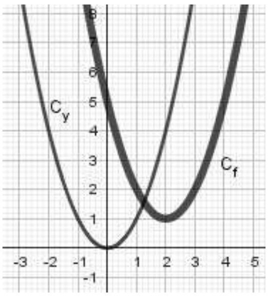
21673.α) $\varphi(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.
β)



γ) Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Έχει ελάχιστο το 1 για x = 0

32674.α)

$f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$.



β) Η y θα μετατοπιστεί οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα πάνω.

Θέμα 4ο

14294. α) Αφού η παραβολή διέρχεται από το Γ τότε $f(0)=-2 \Leftrightarrow \gamma=-2$

Άρα $f(x)=\alpha x^2+\beta x-2$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Β, Γ είναι $f(-2)=f(2)=0$ άρα οι $x_1=-2$ και $x_2=2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Από τους τύπους Vieta είναι

$$S=-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -2+2=-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \beta=0 \text{ και}$$

$$P=\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1x_2=\frac{-2}{\alpha} \Leftrightarrow \cancel{(-2)}\cdot 2=\frac{\cancel{-2}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Άρα $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2=-x+2 \Leftrightarrow x^2-4=-2x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4)=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-4$$

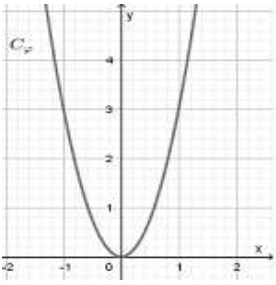
Είναι $g(-4)=4+2=6$ και $g(2)=0$ άρα τα κοινά σημεία είναι $\Delta(-4,6)$ και $A(2,0)$.

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω τότε θα έχουμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)+4{,}5=\frac{1}{2}x^2-2+4{,}5=\frac{1}{2}x^2+2{,}5$

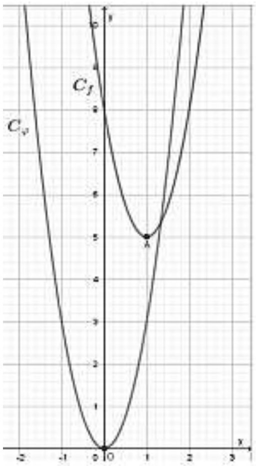
Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$h(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2{,}5=-x+2 \Leftrightarrow x^2+5=-2x+4 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

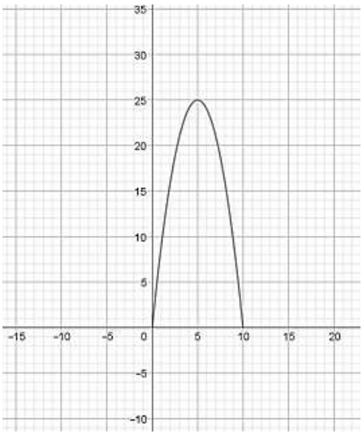


14973.α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
$\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$, επομένως είναι άρτια συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι η διπλανή παραβολή.



β) Είναι:
$f(x) = 3(x-1)^2 + 5 = 3(x^2 - 2x + 1) + 5 \Leftrightarrow$
$f(x) = 3x^2 - 6x + 3 + 5 = 3x^2 - 6x + 8$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$.
Η γραφική παράσταση της προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της , μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω.
γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Α(1,5).
i. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η x = 1.
ii. Η συνάρτηση παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$

iii. Αν λ > 5 η εξίσωση έχει 2 ρίζες
Αν λ = 5 η εξίσωση έχει 1 ρίζα και αν λ < 5 η εξίσωση είναι αδύνατη.



20715.α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 20m δηλαδή
$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$
Πρέπει
$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow$
$x \in (0, 10)$
β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι
$E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x$
Άρα
$E(x) = -x^2 + 10x = -x^2 + 10x - 25 + 25 =$
$= -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -(x-5)^2 + 25$, $0 < x < 10$
γ) Η γραφική παράσταση της E προκύπτει αν μετατοπίσουμε την g κατά 5 μονάδες προς τα δεξιά και 25 μονάδες προς τα πάνω.
Η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=5 το $E(5) = 25$
Άρα το μέγιστο εμβαδόν το έχουμε όταν x=5.
δ) Για x=5 είναι και y=5, δηλαδή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο πλευράς 5.

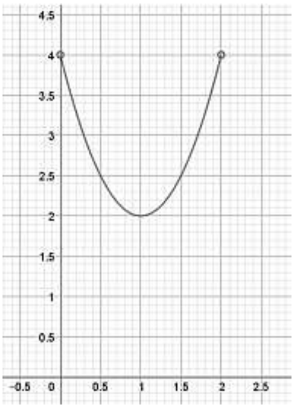
20713.α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΖ είναι

$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 = x^2 + (2-x)^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$

$EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$.

Είναι ΕΒ = x > 0 και $BZ = 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$, άρα $x \in (0,2)$.

β)

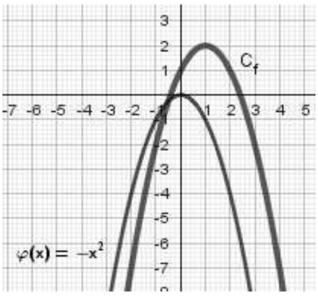


$(EZH\Theta) = E(x) = EZ^2 = 2(x^2 - 2x + 2) = 2\left[(x-1)^2 + 1\right] = 2(x-1)^2 + 2$

γ) Η γραφική παράσταση της Ε προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της C_g κατά 1 μονάδα δεξιά και 2 προς τα πάνω.

δ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το εμβαδόν Ε γίνεται ελάχιστο για x = 1, τότε ΕΒ=ΒΖ=1, οπότε το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο. Τότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου

32677.α)



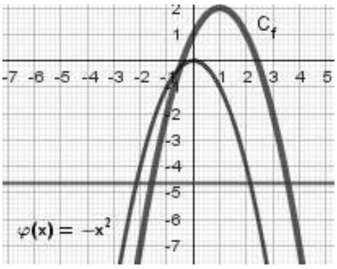
$f(x) = -(x-1)^2 + 2 = -x^2 + 2x - 1 + 2 \Leftrightarrow$

$f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

β) i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii. Η f έχει μέγιστο το 2 για x = 1.

iii. Κάθε οριζόντια ευθεία $y = \kappa,\ \kappa < 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία, επομένως η εξίσωση $f(x) = \kappa,\ \kappa < 2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

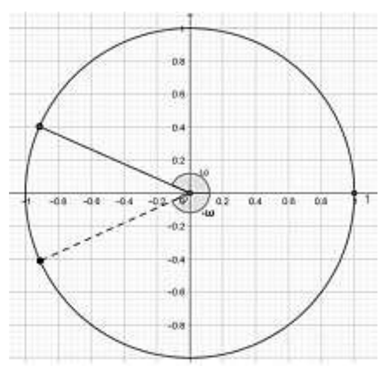
ΘΕΜΑ 2ο

15079.α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου Α είναι $0,6=\frac{3}{5}$, έχουμε $συνω=\frac{3}{5}$.

β) i. Εφόσον η ΟΓ είναι προέκταση της ΟΑ έχουμε $ΑΟΓ=π\ rad$.

Επομένως $φ=ΒΟΓ=π+ω$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας $φ$ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $συνφ=-\frac{3}{5}$.



15191.α) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι αντίθετες όταν έχουν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.
Άρα η γωνία $-\hat{ω}$ είναι όπως φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή στο παρακάτω σχήμα.
β) Το ημίτονο γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας με το κύκλο, οπότε έχουμε, λόγω συμμετρίας $ημ(-ω)=-0,4$

18868. α) $εφ500^{o}=εφ(360^{o}+140^{o})=εφ140^{o}$

β) i) Το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού $εφ500^{o}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $εφ140^{o}$

Είναι $90^{o}<140^{0}<180^{o}$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 140^{o} βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο άρα είναι $εφ140^{o}<0 \Leftrightarrow εφ500^{o}<0$

ii) Είναι $180^o < 250^o < 270^o$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 250^o βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο επομένως $ημ250^0 < 0$.

Είναι $270^o < 300^o < 360^o$ άρα η τελική πλευρά της γωνίας 300^o βρίσκεται στο 4^o τεταρτημόριο άρα είναι $συν300^o > 0$.

Επομένως αφού $εφ500^o < 0$ και $ημ250^0 < 0$ τότε $εφ500^o \cdot ημ250^0 > 0$ και $συν300^o > 0$ άρα Α>0.

21161.α) Ένα ακτίνιο είναι το τόξο ενός κύκλου ακτίνας ρ που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου ρ. Εφόσον το μήκος του τόξου ΑΒ είναι ίσο με δύο ακτίνες του κύκλου η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία θα είναι ίση με 2 ακτίνια.

β) Είναι γνωστό ότι 2π ακτίνια είναι η γωνία η οποία είναι ίση με 360 μοίρες, άρα η γωνία ω που είναι 2 ακτίνια θα αντιστοιχεί $\frac{360}{\pi}$ μοίρες.

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες
ΘΕΜΑ 2ο

15046.α) Επειδή η γωνία Α βρίσκεται σε τρίγωνο είναι $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.
Επειδή $συνA < 0$ είναι $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.

β) Είναι $ημ^2A + συν^2A = 1 \Leftrightarrow ημ^2A + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow ημA = \pm\frac{4}{5}$.

Επειδή $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, είναι ημΑ > 0, άρα $ημA = \frac{4}{5}$.

15060.α) Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (x, y) όπου x = συνθ και y=ημθ. Άρα $ημθ = \frac{1}{2}$.

β) $ημ^2θ + συν^2θ = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$

$συν^2ω = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow συνω = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{π}{2} < θ < π$, οπότε συνω < 0, άρα $συνω = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ) Επειδή $συν\frac{π}{3} = \frac{1}{2}$ και η θ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, είναι

$θ = π - \frac{π}{3} = \frac{2π}{3}$.

15185.α) Το συνημίτονο της γωνίας *ω* είναι όσο και η τετμημένη του σημείου *Β* του τριγωνομετρικού κύκλου. Άρα $συνω = -\frac{3}{5}$.

β) Είναι $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow ημω = \pm\frac{4}{5}$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\frac{π}{2} < ω < π$, οπότε ημω > 0, άρα $ημω = \frac{4}{5}$.

15192.α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι ή τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Οπότε είναι $συνω = -0,6 = -\frac{3}{5}$.

β) i. $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2ω = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow ημω = \pm\frac{4}{5}$

Επειδή η γωνία ω βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο είναι ημω < 0, άρα $ημω = -\frac{4}{5}$.

ii. $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

15814.α) i) Το ακτίνιο (rad) είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας ρ, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ. Εδώ έχουμε επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας 10 cm γωνία ω, η οποία βαίνει σε τόξο 12 cm. Άρα αφού το 1 rad σε αυτόν τον κύκλο είναι η γωνία που βαίνει σε τόξο 10 cm τότε η γωνία $ω = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ rad}$.

ii) Είναι $1,2 < \frac{π}{2} \Leftrightarrow 2,4 < π$ ισχύει , άρα $ω < \frac{π}{2}$ rad και είναι οξεία.

β) Ισχύει $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow ημ^2ω + \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2ω = 1 - \frac{81}{625} \Leftrightarrow ημ^2ω = \frac{544}{625} \Leftrightarrow ημω = \pm\frac{\sqrt{544}}{25} \Leftrightarrow ημω = \pm\frac{4\sqrt{34}}{25}$ και

επειδή η γωνία ω είναι οξεία τότε $ημω = \frac{4\sqrt{34}}{25}$.

16000.α) Έστω ότι υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

Είναι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1$ άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει γωνία θ ώστε $\eta\mu\theta = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$.

β) $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

.

Επειδή $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ είναι ημθ < 0, άρα $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20817.α) Είναι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\frac{3}{5}$.

Επειδή $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ είναι ημω < 0, άρα $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$.

β) Είναι $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ και

$$A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega} = \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{\frac{7}{4}} = -\frac{4}{5}$$

20824.α) Επειδή το σημείο Μ βρίσκεται στον τριγωνομετρικό κύκλο και σχηματίζει γωνία ω με τον ημιάξονα Ox, έχει συντεταγμένες του σημείου (συνω, ημω), άρα $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$.

β) Είναι $ημ^2ω + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + συν^2ω = 1 \Leftrightarrow$

$συν^2ω = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow συνω = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή $\frac{π}{2} < ω < π$, είναι συνω < 0, άρα $συνω = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

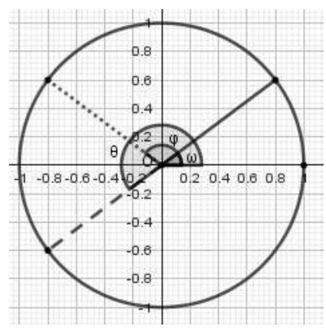
Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Θέμα 2ο

15092.α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}8 = \frac{4}{5}$. Είναι

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

β) Γνωρίζουμε ότι είναι Β(συνθ, ημθ) και Γ(1, εφθ). Έτσι έχουμε $B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\Gamma\left(1, \frac{3}{4}\right)$.



15193.α) Οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $-0{,}8$ έχουν τελική πλευρά στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο, ή οποία τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο σε σημεία με τετμημένη $-0{,}8$. Άρα οι ζητούμενες γωνίες φ και θ είναι όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα, με την τελική τους πλευρά να είναι με διακεκομμένη γραμμή.

β) Δύο γωνίες σχεδιασμένες στον τριγωνομετρικό κύκλο έχουν αντίθετα συνημίτονα, αν τα σημεία τομής της τελικής τους πλευράς με τον τριγωνομετρικό κύκλο είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y ή ως προς την αρχή Ο των αξόνων.
Οπότε οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\varphi = \pi - \omega$ ή διαφέρουν κατά π, οπότε $\theta = \pi + \omega$.

15652.α) Είναι $\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \eta\mu^2\varphi$.

Αντικαθιστούμε το ημφ με $\frac{3}{5}$ και έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

Επειδή φ οξεία γωνία είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi > 0$, οπότε έχουμε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$.

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\omega=\pi-\varphi$.

Άρα : $\eta\mu\omega=\eta\mu(\pi-\varphi)=\eta\mu\varphi=\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu(\pi-\varphi)=-\sigma\upsilon\nu\varphi=-\frac{4}{5}$,

15266.α) Η τελική πλευρά της γωνίας θ είναι η ΟΡ και το σημείο Ρ έχει τετμημένη $x=\frac{3}{5}$, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$.

β) Είναι $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta=1-\sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Leftrightarrow$

$\eta\mu\theta=\pm\frac{4}{5}$.

Επειδή η γωνία θ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο είναι ημθ > 0, άρα

$\eta\mu\theta=\frac{4}{5}$.

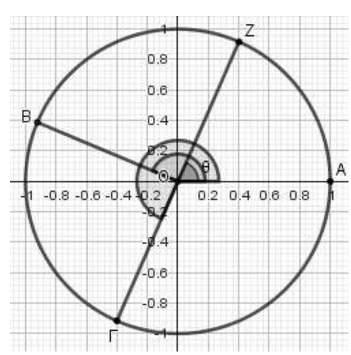
γ) $\eta\mu(-\theta)=-\eta\mu\theta=-\frac{4}{5}$, $\sigma\upsilon\nu(-\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$.

15999.α) $A=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\eta\mu(-\theta)=2\eta\mu\theta-\eta\mu\theta=\eta\mu\theta$

β) $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2\theta=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\pm\frac{5}{13}$.

Επειδή $\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ είναι ημθ < 0, άρα $\eta\mu\theta=-\frac{5}{13}$, οπότε $A=-\frac{5}{13}$.



17936.α) Η τελική πλευρά της $3\pi+\theta$, είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $\frac{\pi}{2}+\theta$ είναι η ΟΒ.

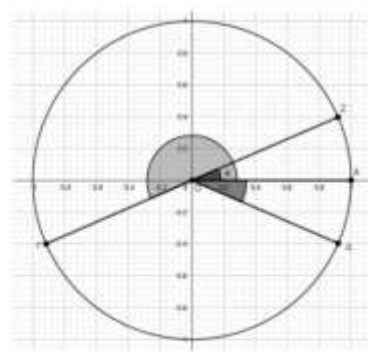
β) i) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η τετμημένη του σημείου Ζ της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0, 4 , άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=0,4$.

ii) 1ος τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$συν(3π+θ) = -0,4$ και $ημ\left(\frac{π}{2}+θ\right) = 0,4$.

2ος τρόπος: Είναι $συν(3π+θ) = συν(π+θ) = -συνθ = -0,4$ και

$ημ\left(\frac{π}{2}+θ\right) = συνθ = 0,4$.



17933.α) Η τελική πλευρά της $3π+θ$ είναι η ΟΓ και η τελική πλευρά της $4π-θ$ είναι ΟΔ.

β) i) Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, η τεταγμένη του σημείου Ζ της τελικής πλευράς της γωνίας θ είναι 0,4 , άρα ημθ = 0,4 .

ii) 1ος τρόπος: Από τις συμμετρίες που σχηματίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο, έχουμε:

$ημ(3π+θ) = -0,4$ και $ημ(4π-θ) = -0,4$.

2ος τρόπος: Είναι $ημ(3π+θ) = ημ(π+θ) = -ημθ = -0,4$ και

$ημ(4π-θ) = ημ(-θ) = -ημθ = -0,4$.

18229.α) $ημ^2θ + συν^2θ = 1 \Leftrightarrow ημ^2θ + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$ημ^2θ = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow ημθ = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Επειδή $θ \in \left(π, \frac{3π}{2}\right)$, είναι ημθ < 0, άρα $ημθ = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

β) $Α = συν(π-θ)συν(-θ) - ημ(π-θ)ημ(-θ) \Leftrightarrow$

$Α = -συνθ \cdot συνθ - ημθ(-ημθ) = -συν^2θ + ημ^2θ \Leftrightarrow$

$Α = -\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{1}{9}$.

20761.α) $\frac{α}{π} = \frac{μ}{180} \Leftrightarrow \frac{α}{π} = \frac{-1125}{180} \Leftrightarrow \frac{α}{π} = -\frac{25}{4} \Leftrightarrow α = \frac{-25π}{4}$.

β) $-1125^0 = -3\cdot 360^\circ - 45^\circ$

$$\eta\mu\left(-1125^0\right) = \eta\mu\left(-3\cdot 360^\circ - 45^\circ\right) = \eta\mu\left(-45^\circ\right) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(-1125^0\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-3\cdot 360^\circ - 45^\circ\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-45^\circ\right) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(-1125^0\right) = \frac{\eta\mu\left(-1125^0\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(-1125^0\right)} = 1,\ \sigma\varphi\left(-1125^0\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(-1125^0\right)}{\eta\mu\left(-1125^0\right)} = 1.$$

20942.α) Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (x, y), όπου x = ημω και y= συνω, άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{3}$.

β) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Επειδή $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, είναι ημω < 0, άρα $\eta\mu\omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}.$$

γ) $\eta\mu\left(\pi - \omega\right) = \eta\mu\omega = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{3}$.

21237.α) i. $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ii. $$\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} = \sqrt{3} - 1$$

β) Είναι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right) = 1 - 3 + 2\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{3} - 3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm\sqrt{2\sqrt{3} - 3}.$$

Επειδή $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνθ > 0, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

22002.α) $\sigma\upsilon\nu 72^{o} = \sigma\upsilon\nu\left(90^{\circ} - 18^{\circ}\right) = \eta\mu 18^{o} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

β) $\sigma\upsilon\nu 108^{o} = \sigma\upsilon\nu\left(90^{\circ} + 18^{\circ}\right) = -\eta\mu 18^{o} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

γ) $\eta\mu 162^{o} = \eta\mu\left(180^{\circ} - 18^{\circ}\right) = \eta\mu 18^{o} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Θέμα 4ο

18231.α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=0 το $f(0)=1$.

β) Είναι $0 < \frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{3}{5} < 0$ και $0 < \frac{5}{9} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{5}{9} < 0$.

Επίσης $-\frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{-27+25}{45} = -\frac{2}{45} < 0$ άρα τελικά

$$-1 < -\frac{3}{5} < -\frac{5}{9} < 0 \overset{f \nearrow [-1,0]}{\Rightarrow} f\left(-\frac{3}{5}\right) < f\left(-\frac{5}{9}\right).$$

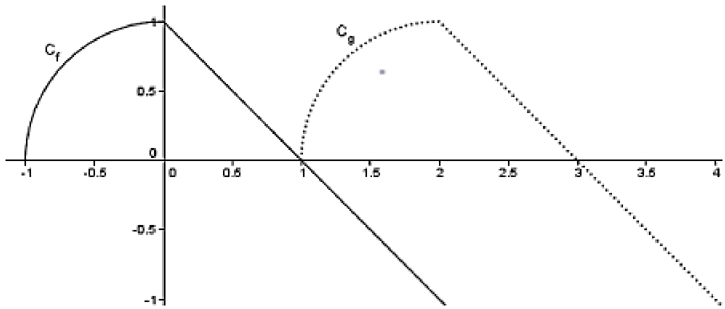
γ) Είναι $\sigma\upsilon\nu 120^{0} = \sigma\upsilon\nu\left(180^{0} - 60^{0}\right) = -\sigma\upsilon\nu 60^{0} = -\frac{1}{2}$ άρα

$$f\left(\sigma\upsilon\nu 120^{0}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Είναι $\eta\mu 120^{0} = \eta\mu\left(180^{0} - 60^{0}\right) = \eta\mu 60^{0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα

$$f\left(\eta\mu 120^{0}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

δ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
Θέμα 2ο

15091.α) i. $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

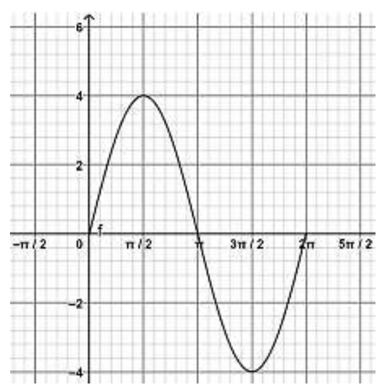
ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\sqrt{2}$ και η ελάχιστη $-\sqrt{2}$.

β) $f\left(2025\pi\right)=\sqrt{2}συν\left(2025\pi\right)=\sqrt{2}συν\left(2024\pi+\pi\right)=\sqrt{2}συν\pi=-\sqrt{2}$

15172.α) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $ημ\left(11\pi-x\right)=ημ\left(10\pi+\pi-x\right)=$ $ημ\left(5\cdot2\pi+\pi-x\right)=ημ\left(\pi-x\right)=ημx$.

ii. Είναι $f\left(x\right)=4ημ\left(11\pi-x\right)=4ημx$.

β) Παρατηρούμε πως η f(x) = 4ημx έχει την μορφή ρημωx με ρ=4 και ω=1. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 4 και ελάχιστη τιμή -4 με περίοδο 2π. Έχοντας τα παραπάνω χαρακτηριστικά και τον παρακάτω πίνακα τιμών στο διάστημα [0,2π],



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	4	0	–4	0

15009.α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho<0$ με $\rho=-3$ και $\omega=1$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$.

γ) Το σχήμα Α) είναι η γραφική παράσταση της $f(x)=-3\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$, γιατί είναι η μόνη που έχει μέγιστη τιμή 3 για x = π και ελάχιστη −3 για x = 0 και x = 2π.

15644.α) Είναι $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$, άρα η C_1 ίναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Ακόμα $g(0)=\eta\mu 0=0$ άρα η C_2 ίναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων είναι τα Α και Β , με τετμημένες $x_1=\frac{\pi}{4}$ και $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

15788.α) Το πεδίο ορισμού συνάρτησης σχεδιασμένης σε σύστημα αξόνων είναι η προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα x΄x . Οπότε είναι $D_g=[\pi,3\pi]$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης g είναι 2 στην θέση $x=\frac{3\pi}{2}$.

β) i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f . Η γραφική παράσταση της f μετατοπίστηκε προς τα «δεξιά» κατά π και προς τα «πάνω» κατά 1.

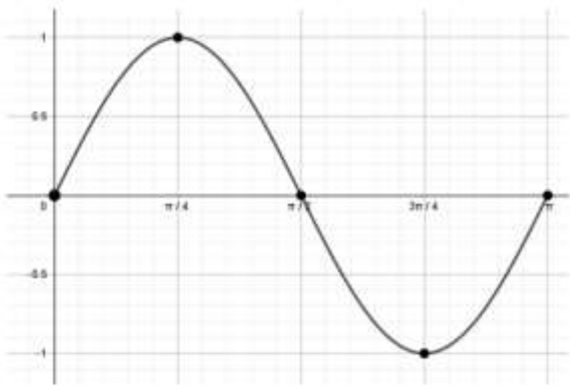
ii. Έχουμε $g(x)=f(x-\pi)+1$, δηλαδή $g(x)=\eta\mu(x-\pi)+1$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\pi,3\pi]$.

15809.α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$, $\rho>0$ με $\rho=1$ και $\omega=2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1. Έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

β) i)

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
2x	0	π/2	π	3π/2	2π
f(x)=ημ2x	0	1	0	−1	0

β) ii)

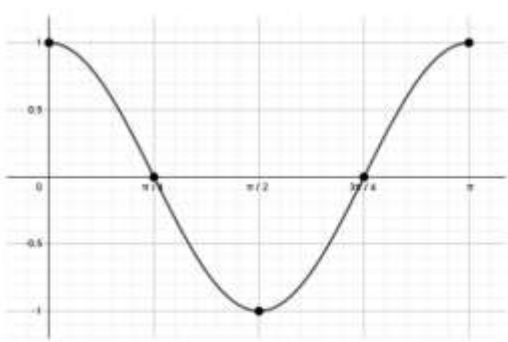


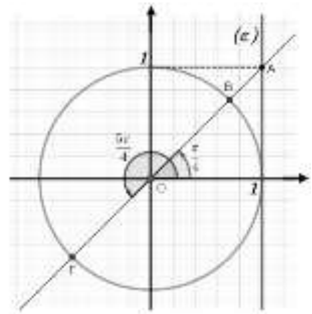
15810.α) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho>0$ με $\rho=1$ και $\omega=2$ οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -1 και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1. Έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

β) i)

x	0	π/4	π/2	3π/4	π
2x	0	π/2	π	3π/2	2π
f(x)=συν2x	1	0	−1	0	1

ii)





16131.α) $f(x)=1 \Leftrightarrow εφx=1 \Leftrightarrow$

$εφx = εφ\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = κ\pi + \frac{\pi}{4}, \; κ \in \mathbb{Z}$.

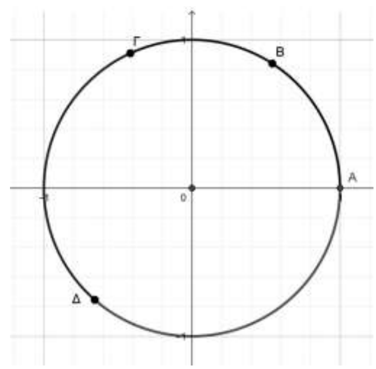
Πρέπει $0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < κ\pi + \frac{\pi}{4} < 2\pi \Leftrightarrow$

$-\frac{\pi}{4} < κ\pi < \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < κ < \frac{7}{4} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$

$κ = 0$ ή $κ = 1$ άρα τελικά είναι

$f(x)=1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

β) Η εφω μίας γωνίας ω είναι τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της της γωνίας ω με την ευθεία (ε): x=1 , η οποία αποτελεί τον άξονα των εφαπτομένων. Οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΓ είναι τελικές πλευρές των γωνιών $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ οι οποίες τέμνουν την x=1 στο Α(1,1).



17793.α) Είναι $AB = 1\text{rad} < \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57$, άρα το σημείο Β βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Είναι $AΓ = 2\text{rad}$, άρα $\frac{\pi}{2} < AΓ < \pi$, οπότε το σημείο Γ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

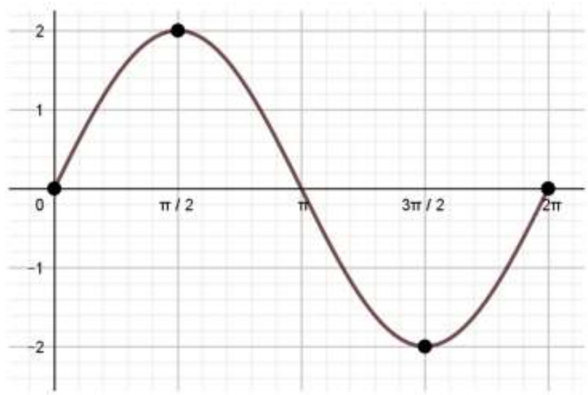
Είναι $AΔ = 4\text{rad}$, άρα $\pi < AΔ < \frac{3\pi}{2}$, οπότε το Δ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο.

β) Επειδή $AOB \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $συνAOB > 0$.

Επειδή $AOΓ \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $συνAOΓ < 0$. Επειδή $AOΔ \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $συνAOΔ < 0$.

20660. α) Είναι $f(x) = ημ(180° - x) + συν(90° - x) = ημx + ημx = 2ημx$

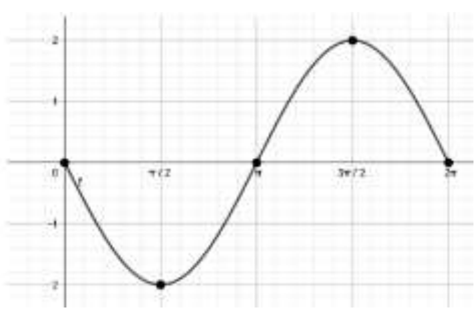
β) i) Η f είναι της μορφής $f(x)=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho=2$ και $\omega=1$ άρα έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$, μέγιστη τιμή το $\rho=2$ και ελάχιστη τιμή το $-\rho=-2$



20807. α) Είναι $f(x)=\eta\mu(\pi+x)+\eta\mu(-x)=-\eta\mu x-\eta\mu x=-2\eta\mu x$.
Είναι της μορφής $f(x)=-\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho=2$ και $\omega=1$ άρα είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$.

β)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)=-2\eta\mu x$	0	-2	0	2	0



20867.α) Για x = 0 είναι $A=\sigma\upsilon\nu^2 0-\eta\mu^2 0=1^2-0=1$

β) $A=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x=1-\eta\mu^2 x-\eta\mu^2 x=1-2\eta\mu^2 x$

γ) $A=1 \Leftrightarrow 1-2\eta\mu^2 x=1$

Οι λύσεις της εξίσωσης $A=1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της $y=1-2\eta\mu^2 x$ με την ευθεία

y =1 που βρίσκονται στο διάστημα $(0,2\pi)$.

Επειδή το κοινό τους σημείο είναι το (π,1), η λύση της εξίσωσης A = 1 στο διάστημα (0,2π) είναι η x = π.

21235.α) $A=\dfrac{\eta\mu(180^\circ-20^\circ)\cdot\sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ-20^\circ)}=\dfrac{\cancel{\eta\mu 20^\circ}\cdot\sigma\upsilon\nu 3x}{\cancel{\eta\mu 20^\circ}}=\sigma\upsilon\nu 3x$

β) $f_{max}=3$ και $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

22003.α) Η περίοδος είναι $T=\dfrac{2\pi}{2\pi}=1$.

β) Είναι $f(0)=\eta\mu 0=0$ και $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\eta\mu\left(2\pi\cdot\dfrac{1}{4}\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}=1$.

γ) Παρατηρούμε ότι περίοδο T = 1 έχουν οι καμπύλες (iii) και (iv).

Η συνάρτηση f στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ (1ο τεταρτημόριο) είναι θετική,

οπότε η καμπύλη (iv) είναι η γραφική παράσταση της f.

22007.α) Τα α, β είναι ρίζες της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x=0$.

Οι ρίζες είναι της μορφής $x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Το α είναι η μεγαλύτερη αρνητική ρίζα της εξίσωσης, οπότε:

$x<0 \Leftrightarrow \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}<0 \Leftrightarrow \kappa\pi<-\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa<-\dfrac{1}{2}$.Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του κ είναι το – 1, άρα

$\alpha=-\pi+\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$.

Το β είναι η δεύτερη μικρότερη θετική ρίζα της εξίσωσης, οπότε

$x>0 \Leftrightarrow \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}>0 \Leftrightarrow \kappa\pi>-\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa>-\dfrac{1}{2}$. Η μικρότερη τιμή του ακέραιου κ είναι το 0 και η ρίζα είναι

$x=0\cdot\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ και η δεύτερη τιμή του ακέραιου κ είναι το 1, τότε:

$\beta=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

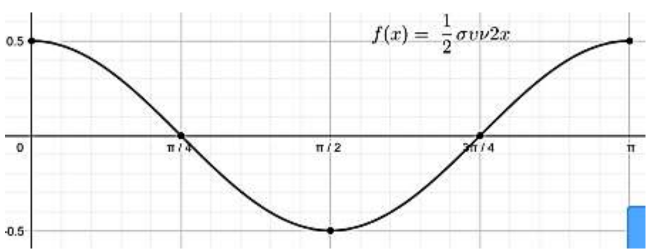
β) Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x$,

οπότε αρκεί να μετατοπιστεί δεξιά κατά $\frac{\pi}{2}$ για να συμπέσει με την $y=\eta\mu x$.

31568.α) Η μέγιστη τιμή της f είναι $\frac{1}{2}$ και η ελάχιστη $-\frac{1}{2}$. $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

β)

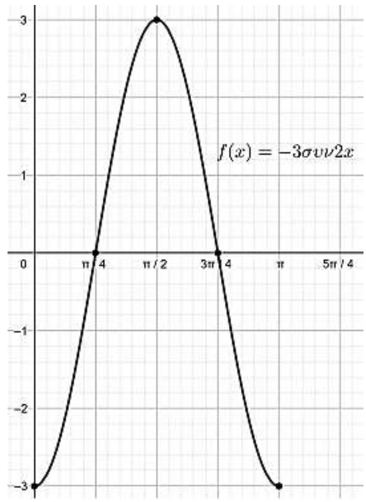
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
συν2x	1	0	-1	0	1
f(x)	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



31569.α) Η μέγιστη τιμή της f είναι 3και η ελάχιστη -3και η περίοδος της είναι $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	π/2	π	3π/2	2π
συν2x	1	0	-1	0	1
$f(x)=-3\sigma\upsilon\nu 2x$	-3	0	3	0	-3



Θέμα 4ο

15062.α) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η γραφική της παράσταση προκύπτει από επανάληψη του τμήματος της που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0,\pi]$, οπότε η περίοδος της f είναι $T = \pi$.

Επιπλέον οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης περιέχονται στο διάστημα $[-3,3]$,

οπότε η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με -3 και η μέγιστη είναι ίση με 3.

β) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\eta\mu(\alpha x)$ με α, $\rho > 0$, οπότε έχει περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$ ελάχιστη τιμή $-\rho$ και μέγιστη ίση με ρ. Έτσι, έχουμε

$\dfrac{2\pi}{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $\rho = 3$.

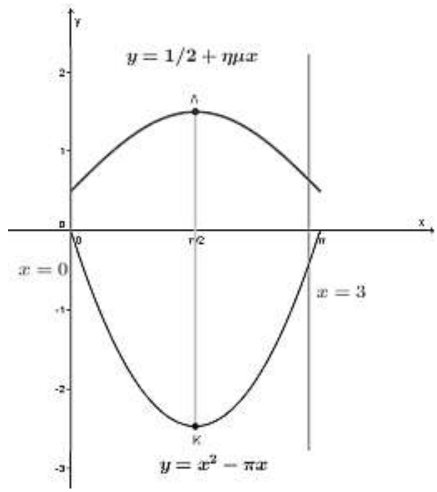
γ) Είναι $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4 = (x^2 - 1)^2 + 4$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 4 \geq 4 \Leftrightarrow g(x) \geq 4$ και η ισότητα ισχύει όταν

$(x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα ο αριθμός 4 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 4$ και $-3 \leq f(x) \leq 3$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη.
Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

15095.α) i. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της y =ημx κατά 1/2 προς τα πάνω.

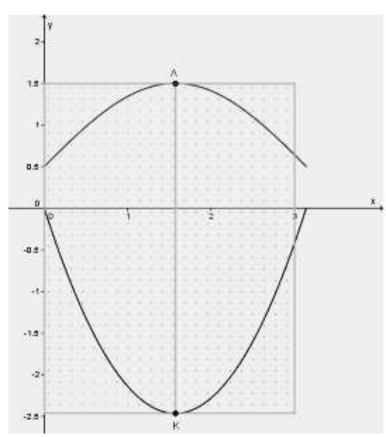


ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Έχει ελάχιστο στο Κ το $-\frac{\pi^2}{4}$ και μέγιστο το $f(0) = f(\pi) = 0$ για x = 0 και x = π.

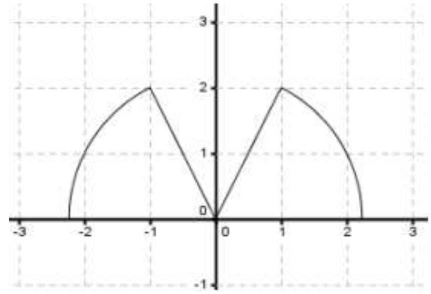
Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Έχει μέγιστο το $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ για $x = \frac{\pi}{2}$ και ελάχιστο το $g(0) = g(\pi) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ για x = 0 και x = π.

β) Η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των δύο καμπυλών είναι για $x = \frac{\pi}{2}$, γιατί τότε η f γίνεται ελάχιστη και η g μέγιστη. Η μέγιστη απόσταση είναι: $g_{max} - f_{min} = \frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{4}$.



γ) Οι ελάχιστες διαστάσεις που πρέπει να έχει το ορθογώνιο πλακίδιο που θα καλύψει τη περιοχή είναι μήκος ΚΛ=$\frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{4}$ και πλάτος 3.



15689.α) Επειδή η f είναι άρτια έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, οπότε σχεδιάζουμε το κομμάτι της C_f που λείπει συμμετρικά ως προς τον y΄y.
β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-\sqrt{5},-1\right],\left[0,1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα $\left[-1,0\right],\left[1,\sqrt{5}\right]$. Έχει μέγιστο το 2 για x = -1 και x = 1, ενώ έχει ελάχιστο το 0 για $x=-\sqrt{5},\ x=\sqrt{5}$ και x= 0

γ) i. Επειδή $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\etaμ\frac{\pi}{4}<\etaμ\theta<\etaμ\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<\etaμ\theta<1$ και

$συν\frac{\pi}{4}>συν\theta>συν\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<συν\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $συν\theta<\etaμ\theta$

ii. Επειδή $\etaμ\theta,\ συν\theta\in(0,1)$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι: $συν\theta<\etaμ\theta\Leftrightarrow f(συν\theta)<f(\etaμ\theta)$.

15992.α) Το ρ είναι η μέγιστη τιμή της f και το –ρ την ελάχιστη τιμή άρα είναι $\rho=2$.

Η περίοδος της g είναι $T=\pi\Leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Leftrightarrow\omega=2$.

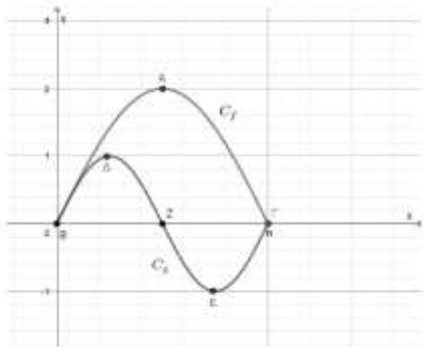
β) ii) Για την συνάρτηση $f(x)=2\etaμx$, $x\in[0,\pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)=2\etaμx$	0	2	0

Για την συνάρτηση $g(x)=\etaμ(2x)$, $x\in[0,\pi]$ έχουμε:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	π/2	π	3π/2	2π
$g(x)=\etaμ2x$	0	1	0	-1	0

Άρα έχουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



18234.α) Είναι $-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2ημx \le 2 \Leftrightarrow$

$-3 \le 2ημx - 1 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le f(x) \le 1$

Είναι $f(x) = -3 \Leftrightarrow 2ημx - 1 = -3 \Leftrightarrow 2ημx = -2 \Leftrightarrow$

$ημx = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ - \dfrac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \le x \le 2π \Leftrightarrow 0 \le 2κπ - \dfrac{π}{2} \le 2π \Leftrightarrow$

$\dfrac{π}{2} \le 2κπ \le \dfrac{5π}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \le κ \le \dfrac{5}{4} \overset{κ \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ = 1$ άρα $x = 2π - \dfrac{π}{2} = \dfrac{3π}{2}$.

Άρα είναι $f(x) \ge -3$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \dfrac{3π}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \dfrac{3π}{2}$ το $f\left(\dfrac{3π}{2}\right) = -3$.

Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2ημx - 1 = 1 \Leftrightarrow 2ημx = 2 \Leftrightarrow$

$ημx = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \dfrac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \le x \le 2π \Leftrightarrow 0 \le 2κπ + \dfrac{π}{2} \le 2π \Leftrightarrow -\dfrac{π}{2} \le 2κπ \le \dfrac{3π}{2} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{4} \le κ \le \dfrac{3}{4} \overset{κ \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ = 0$ άρα $x = \dfrac{π}{2}$.

Άρα είναι $f(x) \leq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$ το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

β) Είναι $f(0) = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημεία $A(0,-1)$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow$

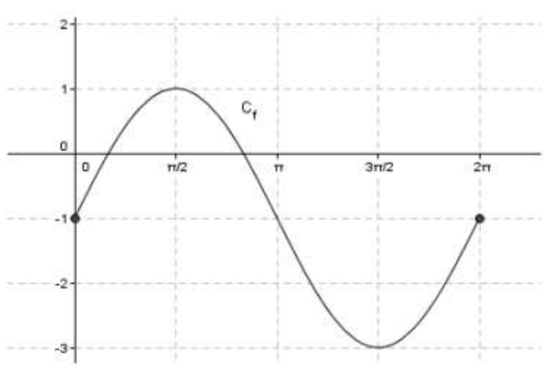
$-\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$ άρα $x = \frac{\pi}{6}$.

Είναι $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}$.

γ)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0
f(x)	-1	1	-1	-3	-1



δ) $f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha-1=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-1\Leftrightarrow$

$2\eta\mu\alpha=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Leftrightarrow \eta\mu\alpha=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ (\mathrm{A})$.

1^ος τρόπος:

$(\mathrm{A})\Leftrightarrow\left(\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\Leftrightarrow 2\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\ \ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\cancel{\alpha}=\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+\cancel{\alpha}\Leftrightarrow\kappa\pi+\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow\right.$

$\left.\kappa\pi=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\kappa=-\frac{1}{2}\ \ \text{αδύνατη αφού}\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

Είναι $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\le\frac{\kappa\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le\kappa\le\frac{1}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0$

άρα $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

2^ος τρόπος: $(\mathrm{A})\Leftrightarrow\eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha=0$ τότε από (Α) και $\eta\mu\alpha=0$ άρα $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο.

Άρα για $\sigma\upsilon\nu\alpha\ne0$ είναι

$(1)\Leftrightarrow\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Είναι $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{4}\le\kappa\pi\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0$

άρα $\alpha=\frac{\pi}{4}$

20870.α) Το διάστημα ανάμεσα στο πρώτο μέγιστο βάθος και στο πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 6 ώρες, που είναι η μισή περίοδος. Κατά συνέπεια η περίοδος είναι Τ = · = 2 6 12 ώρες και $T=\frac{2\pi}{\omega}\Leftrightarrow 12\omega=2\pi\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}$.

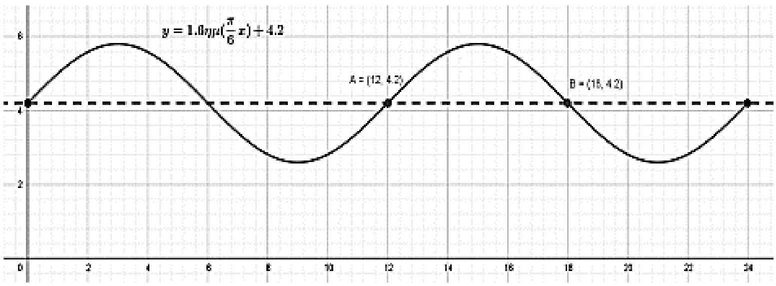
Είναι $-1\le\eta\mu(\omega t)\le1\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}-\alpha\le\alpha\eta\mu(\omega t)\le\alpha\Leftrightarrow-$

$\alpha+\beta\le\alpha\eta\mu(\omega t)+\beta\le\alpha+\beta\Leftrightarrow-\alpha+\beta\le y\le\alpha+\beta$.

Επειδή το ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και το μέγιστο 5,8 μέτρα, είναι

$$\begin{cases} -\alpha+\beta=2,6 \\ \alpha+\beta=5,8 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2\beta=8,4 \Leftrightarrow \beta=4,2 \text{ και } \alpha+4,2=5,8 \Leftrightarrow \alpha=1,6\,.$$

i. Η συνάρτηση έχει μέγιστο 5,8 , ελάχιστο 2, 6 και περίοδο 12, οπότε η γραφική της παράσταση σε διάστημα δυο περιόδων (0 $\le t \le 24$) είναι:



ii. Το βάθος του νερού, σε μέτρα, στις 12 το μεσημέρι είναι:

$$y=1,6\cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\cdot 12\right)+4,2=1,6\cdot 0+4,2=4,2\,\cdot$$

iii. Όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $y=1,6\cdot\eta\mu(\frac{\pi}{6}t)+4,2$, το πλοίο θα δέσει με ασφάλεια το χρονικό διάστημα [12,18], δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \ge 4,2$.

3ο Θέμα

15391. α) 1ος τρόπος: Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$ στο $[0,2\pi]$ οι οποίες όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ακριβώς δύο.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα η μία ρίζα είναι η $x=\frac{\pi}{4}$ επειδή $0\le\frac{\pi}{4}\le 2\pi$.

Επίσης είναι $\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ άρα η δεύτερη ρίζα είναι η $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ επειδή $0\le\frac{5\pi}{4}\le 2\pi$.

Άρα είναι $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2ος τρόπος: Αρκεί να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\ (1)$ στο $[0,2\pi]$ οι οποίες όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ακριβώς δύο.

Αν $\sigma\upsilon\nu x=0$ τότε από (1) και $\eta\mu x=0$ άρα $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο.

Άρα για $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$ είναι

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Για $\kappa=0$ είναι $x=\frac{\pi}{4}$ και επειδή $0\leq\frac{\pi}{4}\leq 2\pi$ είναι δεκτή.

Για $\kappa=1$ είναι $x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ και επειδή $0\leq\frac{5\pi}{4}\leq 2\pi$ είναι δεκτή.

Επειδή από το σχήμα έχει ακριβώς δύο ρίζες οι παραπάνω είναι και οι μοναδικές.

Αλλιώς μπορούμε να κάνουμε: $0\leq x\leq 2\pi\Leftrightarrow 0\leq\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\leq 2\pi\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}\leq\kappa\pi\leq\frac{7\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\leq\kappa\leq\frac{7}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0\ \text{ή}\ \kappa=1$$

β) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

γ) i) Είναι $\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}<\pi=\frac{6\pi}{6}$ άρα

$$\frac{2\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}\overset{g\searrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}{\Leftrightarrow} g\left(\frac{2\pi}{3}\right)>g\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}>\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$$

ii) Είναι $\frac{3\pi}{2}=\frac{9\pi}{6}<\frac{5\pi}{3}=\frac{10\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}<2\pi=\frac{12\pi}{6}$ άρα $\frac{5\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}\overset{f\nearrow\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{f\nearrow\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{5\pi}{3}\right)<f\left(\frac{11\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\eta\mu\frac{5\pi}{3}<\eta\mu\frac{11\pi}{6}.$$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Θέμα 2ο

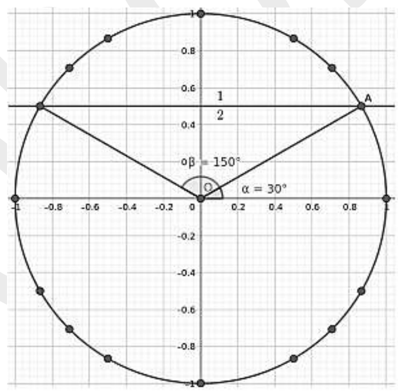
15036.α) i) Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, $\rho > 0$ με $\rho = 3$ και $\omega = 2$. Η μέγιστη τιμή της f είναι $\rho = 3$ και η ελάχιστη τιμή $-\rho = -3$.

ii) Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi$.

β) $f(x) = -3 \Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu 2x = -3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -1 \Leftrightarrow$

$2x = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

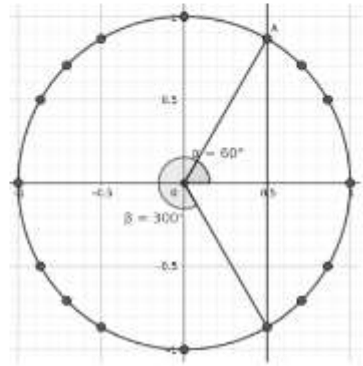
14977.α) Το ημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οx και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα y΄y. Άρα, οι γωνίες που έχουν ημίτονο $\dfrac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα y΄y στο $\dfrac{1}{2}$.



Οπότε φέρουμε την ευθεία $y = \dfrac{1}{2}$ και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα [0,2π) που έχουν αυτό το ημίτονο. Είναι οι γωνίες $\dfrac{\pi}{6}$ και $\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Το συνημίτονο μίας γωνίας με μία πλευρά την ημιευθεία Οx και δεύτερη πλευρά που τέμνει στο σημείο Α του κύκλου, βρίσκεται από την προβολή του σημείου Α στον άξονα x΄x. Άρα οι γωνίες που έχουν συνημίτονο $\dfrac{1}{2}$ θα έχουν σημεία τομής με τον κύκλο τέτοια, ώστε η προβολή τους να τέμνει τον άξονα x΄x στο $\dfrac{1}{2}$.

Οπότε φέρουμε την ευθεία $x=\frac{1}{2}$
και προκύπτουν δύο γωνίες στο διάστημα $[0,2\pi)$ που έχουν αυτό το συνημίτονο.
Είναι οι γωνίες $\frac{\pi}{3}$ και $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$



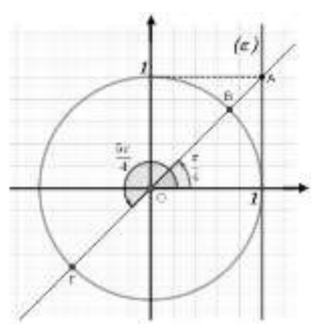
β) $\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$
$\left(x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή
$\left(x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

15969.α) $\sigma\upsilon\nu(13\pi+x)=\sigma\upsilon\nu(12\pi+\pi+x)=\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x$

β) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu(13\pi+x)-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-2\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu x=-4\sigma\upsilon\nu x$

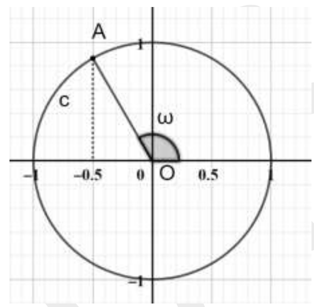
γ) $f(x)=-2\Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu x=-2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$
$x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

16131.α) $f(x)=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow$
$\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.
Πρέπει $0<x<2\pi\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<2\pi\Leftrightarrow$
$-\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{7\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\kappa<\frac{7}{4}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$
$\kappa=0$ ή $\kappa=1$ άρα τελικά είναι
$f(x)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.



β) Η εφω μίας γωνίας ω είναι τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της της γωνίας ω με την ευθεία (ε): x=1 , η οποία αποτελεί τον άξονα των εφαπτομένων. Οι ημιευθείες ΟΒ και ΟΓ είναι τελικές πλευρές των γωνιών $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ οι οποίες τέμνουν την x=1 στο Α(1,1).

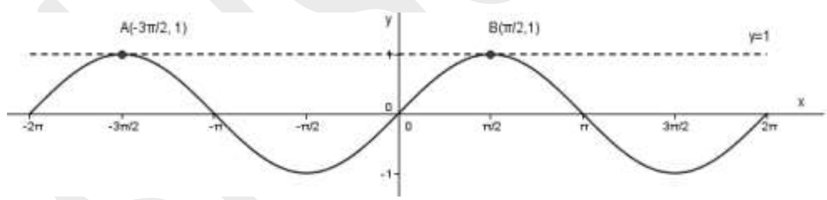
16298.α) Είναι $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ και επειδή η γωνία βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, είναι $\omega=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.



β) $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

21995.α) Για α = 1 η εξίσωση γίνεται $\eta\mu x=1$.
Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $y=\eta\mu x$, βλέπουμε ότι τα σημεία τομής της με την ευθεία y = 1 στο διάστημα $\left[-2\pi,2\pi\right]$, είναι τα $A\left(-\frac{3\pi}{2},1\right)$ και $B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι



$x=-\frac{3\pi}{2}$ ή $x=\frac{\pi}{2}$.

β) Για α = - 2 η εξίσωση γίνεται $\eta\mu x=-2$ και είναι αδύνατη γιατί $-1\le\eta\mu x\le1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

32675. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι
$-1\le\eta\mu x\le1\Leftrightarrow-2\le2\eta\mu x\le2\Leftrightarrow-1\le2\eta\mu x+1\le3\Leftrightarrow-1\le f\left(x\right)\le3$.
Η f έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 3.

β) $f\left(x\right)=3\Leftrightarrow 2\eta\mu x+1=3\Leftrightarrow 2\eta\mu x=2\Leftrightarrow \eta\mu x=1\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Θέμα 4ο

15003.α) i. $f(x)=\etaμαx\cdot\left[συν\left(\frac{\pi}{2}-αx\right)+2\right]-συναx\cdot συν(\pi-αx)-1\Leftrightarrow$

$f(x)=\etaμαx\cdot(\etaμαx+2)-συναx\cdot(-συναx)-1\Leftrightarrow$

$f(x)=\etaμ^2αx+2\etaμαx+συν^2αx-1=1+2\etaμαx-1=2\etaμαx$

ii. Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει περίοδο Τ = π, άρα $\frac{2\pi}{α}=\pi\Leftrightarrow α=2$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την y = 1 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$.

Είναι $f(x)=1\Leftrightarrow 2\etaμ2x=1\Leftrightarrow \etaμ2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \etaμ2x=\etaμ\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$\left(2x=2κ\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=κ\pi+\frac{\pi}{12},κ\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(2x=2κ\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=κ\pi+\frac{5\pi}{12},κ\in\mathbb{Z}\right)$.

Είναι $0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le κ\pi+\frac{\pi}{12}\le\pi\Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}\le κ\pi\le\frac{11\pi}{12}\Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le κ\le\frac{11}{12}$,

όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα κ = 0, οπότε $x=\frac{\pi}{12}$.

Είναι $0\le x\le\pi\Leftrightarrow 0\le κ\pi+\frac{5\pi}{12}\le\pi\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{12}\le κ\pi\le\frac{7\pi}{12}\Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le κ\le\frac{7}{12}$,

όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα κ = 0, οπότε $x=\frac{5\pi}{12}$. Τα ζητούμενα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{12},1\right)$.

15014.α) Η μέγιστη τιμή της f είναι η α, άρα α = 2.

β) $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=2\Leftrightarrow 2\etaμ\frac{β\pi}{16}=2\Leftrightarrow \etaμ\frac{β\pi}{16}=1\Leftrightarrow \frac{β\pi}{16}=2κ\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$

$β\pi=32κ\pi+8\pi\Leftrightarrow β=32κ+8,\ κ\in\mathbb{Z}$.

$β>0\Leftrightarrow 32κ+8>0\Leftrightarrow 32κ>-8\Leftrightarrow κ>-\frac{1}{4}$. Όμως $κ\in\mathbb{Z}$, οπότε η μικρότερη τιμή του κ είναι το 0 και τότε η μικρότερη τιμή του β είναι 8.

γ) $f(x)=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 8x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 8x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\left(8x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(8x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

Πρέπει $0\le x\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{\pi}{48}\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le 12\kappa\pi+\pi\le 24\pi \Leftrightarrow$

$-\pi\le 12\kappa\pi\le 23\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{23}{12}$.

Επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι κ = 0 ή κ = 1. Τότε $x=\frac{\pi}{48}$ ή

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{48}=\frac{13\pi}{48}$

Πρέπει $0\le x\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\kappa\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le 12\kappa\pi+5\pi\le 24\pi \Leftrightarrow$

$-5\pi\le 12\kappa\pi\le 19\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{19}{12}$.

Επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι κ = 0 ή κ = 1. Τότε $x=\frac{5\pi}{48}$ ή

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{48}=\frac{17\pi}{48}$.

15025.α) $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\pm\frac{3}{5}$.

Επειδή $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι συνθ < 0, άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{3}{5}$. Είναι

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$, $\sigma\varphi\theta=\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}=-\frac{3}{4}$

β) Έστω ότι το Μ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε $x=\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{3}{5}$ και

$y=\eta\mu\theta=\frac{4}{5}$, άρα $M\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

Η ευθεία x = 1 είναι ο άξονας των εφαπτομένων, οπότε η τεταγμένη του Κ είναι η εφθ και το Κ έχει συντεταγμένες $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$.

γ) i. η γωνία φ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο γιατί μόνο εκεί είναι ημφ > 0 και συν φ < 0.
ii. Είναι ημθ > ημφ και η συνάρτηση y = ημx είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, οπότε θ < φ.

15026.α) $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-1\le ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 1\Leftrightarrow -2\le 2ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 2\Leftrightarrow$

$-1\le 1+2ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 3\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 3$ άρα η f έχει ελάχιστο το – 1 όταν

$ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-1\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}=2κ\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=4κ-1,\ κ\in\mathbb{Z}$ και μέγιστο το 3 όταν

$ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2}=2κ\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=4κ+1,\ κ\in\mathbb{Z}$.

γ) $f(x)=0\Leftrightarrow 1+2ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-1\Leftrightarrow ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$ημ\left(\frac{\pi x}{2}\right)=ημ\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\left(\frac{\pi x}{2}=2κ\pi-\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \pi x=4κ\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=4κ-\frac{1}{3},\ κ\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\frac{\pi x}{2}=2κ\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \pi x=4κ\pi+\frac{7\pi}{3}\Leftrightarrow x=4κ+\frac{7}{3},\ κ\in\mathbb{Z}\right)$

Οπότε οι ζητούμενες τετμημένες είναι $x=4κ-\frac{1}{3}$ ή $x=4κ+\frac{7}{3},\ κ\in\mathbb{Z}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(1-x)=1+2ημ\left(\frac{\pi(1-x)}{2}\right)=1+2ημ\left(\frac{\pi-\pi x}{2}\right)=$

$1+2ημ\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)=1+2συν\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, οπότε

$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=$

$\left(\cancel{1}+2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cancel{1}\right)^2+\left(\cancel{1}+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\cancel{1}\right)^2\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-1\right)^2+\left(f(1-x)-1\right)^2=4\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=$

$4\left[\eta\mu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]=4\cdot 1=4$.

15049.α) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu(\pi+x)=-\eta\mu x$, οπότε

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

β) Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\,(1)$ και

$-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow 1\ge-\eta\mu x\ge-1\Leftrightarrow-1\le-\eta\mu x\le 1\ (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι

$-2\le\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\le 2\Leftrightarrow-2\le f(x)\le 2$.

Για να είναι ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της f πρέπει να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο συνx = 1 και

$-\eta\mu x=1\Leftrightarrow\eta\mu x=-1$ που είναι αδύνατο γιατί $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1+1=2\neq 1$.

γ) i. Είναι $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0-\eta\mu 0=1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,1).

ii. $f(x)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ είναι $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ και για $x=2\pi+\frac{\pi}{4}$

είναι $\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $f\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Δύο σημεία τομής της C_f με τον x΄x είναι τα $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ και $\left(\frac{9\pi}{4},0\right)$.

15050. α) Είναι $f_{min}=-2$ και $f_{max}=2$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = 1$ προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1$. Είναι

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Για κ = 0 είναι $x = \frac{\pi}{3}$ και για κ = 1 είναι $x = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$. Άρα δύο κοινά σημεία της C_f με την ευθεία

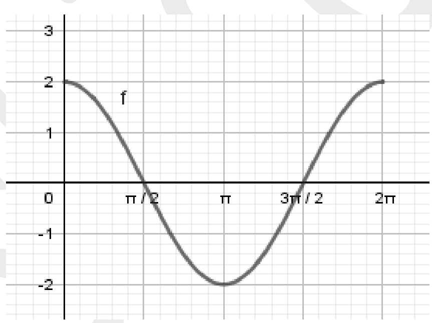
$y = 1$ είναι τα $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right), \left(\frac{7\pi}{3}, 1\right)$.

γ) Οι αριθμοί $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}$ βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο όπου η συνάρτηση συνx είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι $\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{15} < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

δ)

x	0	π/2	π	3π/2	2π
f(x)	2	0	-2	0	2



15287.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το -3, άρα ρ = 3.

Ακόμη παρατηρούμε ότι η f έχει περίοδο π, άρα $\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow 2 = \omega$. Άρα

$$f(x) = 3\eta\mu(2x)$$

β) Η ευθεία y =αx διέρχεται από το σημείο Ε της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 3, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε διάστημα μιας περιόδου στο $\frac{1}{4}$ της περιόδου, δηλαδή στο $\frac{\pi}{4}$, άρα $E\left(\frac{\pi}{4},3\right)$, οπότε $3=\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{12}{\pi}=\alpha$ και η ευθεία έχει εξίσωση $y=\frac{12}{\pi}x$.

γ) $3\eta\mu(2x)-\frac{12}{\pi}x=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{12}{\pi}x$

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\frac{12}{\pi}x$.Με βάση το σχήμα τα σημεία τομής είναι 3, οι τετμημένες των οποίων είναι:

- $x=0$
- $x=\frac{\pi}{4}$ και
- $x=-\frac{\pi}{4}$ αφού $y=\frac{12}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-3$ και

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=3\eta\mu\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=3\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3(-1)=-3$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$ και $x=-\frac{\pi}{4}$.

15288α) Είναι $T=\frac{2\pi}{3}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$-1\le\eta\mu3x\le1\Leftrightarrow-2\le2\eta\mu3x\le2\Leftrightarrow-1\le2\eta\mu3x+1\le3\Leftrightarrow-1\le f(x)\le3$,

επομένως η f έχει ελάχιστο το -1 όταν $\eta\mu3x=-1$ και μέγιστο το 3 όταν $\eta\mu3x=1$.

β) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η g έχει περίοδο π, άρα

$\frac{2\pi}{\beta}=2\pi\Leftrightarrow\beta=1$.

Επειδή η γραφική παράσταση της g διέρχεται από τα σημεία

$(0,1)$ και $\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$ ισχύει ότι:

$g(0)=1 \Leftrightarrow \gamma=1$ και $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\frac{\pi}{2}+1=-1 \Leftrightarrow \alpha=-2$.

ii. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu3x+1=2\eta\mu x+1 \Leftrightarrow \eta\mu3x=\eta\mu x \overset{x\in[0,\pi)}{\Leftrightarrow}$

$(3x=x \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0)$ ή $\left(3x=\pi-x \Leftrightarrow 4x=\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\right)$.

15347.α) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu^2(\pi-x)-3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\alpha=$

$2(-\sigma\upsilon\nu x)^2-3\sigma\upsilon\nu x+\alpha \Leftrightarrow f(x)=2\sigma\upsilon\nu^2 x-3\sigma\upsilon\nu x+\alpha$

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(-x)=2\sigma\upsilon\nu^2(-x)-3\sigma\upsilon\nu(-x)+\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2 x-3\sigma\upsilon\nu x+\alpha=f(x)$, οπότε η f είναι άρτια.

γ) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3},1\right)$, ισχύει ότι:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3}-3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\alpha=1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+\alpha=1 \Leftrightarrow$

$\frac{2}{4}-\frac{3}{2}+\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=2$.

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x-3\sigma\upsilon\nu x+2=2\eta\mu^2 x+9\sigma\upsilon\nu x-9 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2 x-3\sigma\upsilon\nu x+2-2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)-9\sigma\upsilon\nu x+9=0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2 x-12\sigma\upsilon\nu x+11-2+2\sigma\upsilon\nu^2 x=0 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x-12\sigma\upsilon\nu x+9=0 \Leftrightarrow$

$(2\sigma\upsilon\nu x-3)^2=0 \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu x-3=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{3}{2}$ αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

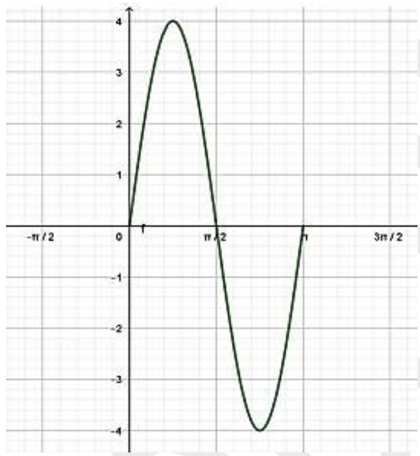
15422.α) $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\eta\mu(\pi+2x)=$

$\alpha\eta\mu2x-2(-\eta\mu2x)=\alpha\eta\mu2x+2\eta\mu2x=(\alpha+2)\eta\mu2x$.

β) i. Επειδή $\alpha > 0$ η f έχει μέγιστη τιμή το $\alpha+2$, άρα $\alpha+2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$.

ii. Η περίοδος της f είναι $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

γ)



δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x=5-\sigma\upsilon\nu^2 2x \Leftrightarrow 4\eta\mu 2x=5-\left(1-\eta\mu^2 2x\right) \Leftrightarrow$

$4\eta\mu 2x=5-1+\eta\mu^2 2x \Leftrightarrow \eta\mu^2 2x-4\eta\mu 2x+4=0 \Leftrightarrow$

$\left(\eta\mu 2x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x-2=0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=2$ αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

14975. α) Έστω η συνάρτηση $f(t)=0,2\cdot\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ η οποία είναι της μορφής $y=\rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho=0,2$ και $\omega=\dfrac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
4ημ2x	0	4	0	−4	0

Είναι $y(t)=1+f(t)$ και επειδή 1m είναι απόσταση από το πάτωμα όταν βρίσκεται στην Θ.Ι. τότε είναι $y_0 = (OA) = (OB) = \rho = 0,2$ γιατί η f έχει μέγιστη τιμή την ρ και ελάχιστη τιμή την $-\rho$.

Για την y(t) ισχύει ότι έχει μέγιστη τιμή την $1+\rho = 1,2$ και ελάχιστη τιμή την $1-\rho = 0,8$.

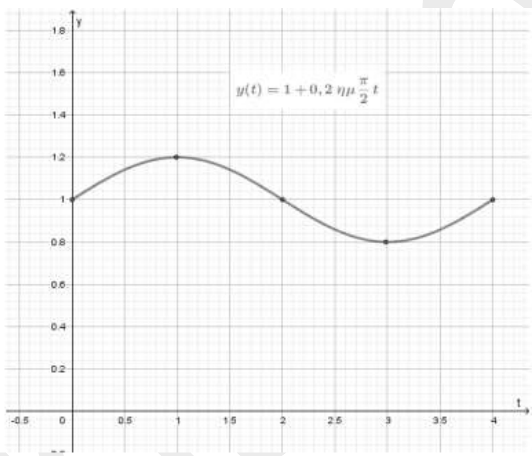
t	0	1	2	3	4
y(t)	1	1,2	1	0,8	1

Άρα

$d_{(AB)} = (OA) + (OB) = 0,4$.

β) Είναι $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ γιατί $y(t) = 1 + f(t)$.

γ)



δ) $y(t) = 1,1 \Leftrightarrow 1 + 0,2 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) = 1,1 \Leftrightarrow 0,2 \cdot \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) = 0,1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) = \eta\mu\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4\kappa + \dfrac{1}{3}\right)$

ή $\left(\dfrac{\pi}{2}t = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t = 4\kappa + \dfrac{5}{3}\right)$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

Είναι $0 \le 4\kappa + \dfrac{1}{3} \le 2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le 4\kappa \le \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{12} \le \kappa \le \dfrac{5}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$ άρα $t = \dfrac{1}{3}$ sec

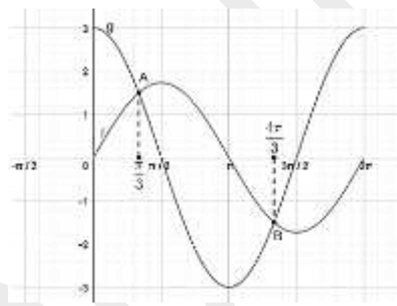
Είναι $0 \le 4\kappa + \dfrac{5}{3} \le 2 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{3} \le 4\kappa \le \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{5}{12} \le \kappa \le \dfrac{1}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$ άρα $t = \dfrac{5}{3}$ sec

15821.α) Έστω ότι υπάρχει γωνία x με ημx = συνx = 0, τότε
$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία.

β) Αν συνx = 0, τότε η εξίσωση γίνεται $\sqrt{3} \cdot ημx = 3 \cdot 0 \Leftrightarrow ημx = 0$ αδύνατο από προηγουμένως, άρα
$ημx \neq 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\sqrt{3} \cdot ημx}{\sqrt{3} \cdot συνx} = \frac{3 \cdot συνx}{\sqrt{3} \cdot συνx} \Leftrightarrow εφx = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$εφx = εφ\frac{π}{3} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{3},\ κ \in \mathbb{Z}.$$



γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα

δ) Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

x	0	π/2	π	3π/2	2π
$f(x) = \sqrt{3} \cdot ημx$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x) = 3 \cdot συνx$	3	0	−3	0	3

Με βάση τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ στο β σκέλος τα σημεία τομής τους Α, Β έχουν τετμημένες $x = \frac{π}{3}$ και $x = \frac{4π}{3}$ αντίστοιχα.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g στο
$\left(0, \frac{π}{3}\right) \cup \left(\frac{4π}{3}, 2π\right]$, άρα στο διάστημα $[0, 2π]$ είναι:

$$\sqrt{3} \cdot ημx < 3 \cdot συνx \Leftrightarrow f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{π}{3}\right) \cup \left(\frac{4π}{3}, 2π\right].$$

18234.α) Είναι $-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2ημx \le 2 \Leftrightarrow$

$-3 \le 2ημx - 1 \le 1 \Leftrightarrow -3 \le f(x) \le 1$

Είναι $f(x) = -3 \Leftrightarrow 2ημx - 1 = -3 \Leftrightarrow 2ημx = -2 \Leftrightarrow$

$ημx = -1 \Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \le x \le 2π \Leftrightarrow 0 \le 2κπ - \frac{π}{2} \le 2π \Leftrightarrow$

$\frac{π}{2} \le 2κπ \le \frac{5π}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le κ \le \frac{5}{4} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ = 1$ άρα $x = 2π - \frac{π}{2} = \frac{3π}{2}$.

Άρα είναι $f(x) \ge -3$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{3π}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3π}{2}$ το $f\left(\frac{3π}{2}\right) = -3$.

Είναι $f(x) = 1 \Leftrightarrow 2ημx - 1 = 1 \Leftrightarrow 2ημx = 2 \Leftrightarrow$

$ημx = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Είναι $0 \le x \le 2π \Leftrightarrow 0 \le 2κπ + \frac{π}{2} \le 2π \Leftrightarrow -\frac{π}{2} \le 2κπ \le \frac{3π}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{4} \le κ \le \frac{3}{4} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ = 0$ άρα $x = \frac{π}{2}$.

Άρα είναι $f(x) \le 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{π}{2}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \frac{π}{2}$ το $f\left(\frac{π}{2}\right) = 1$.

β) Είναι $f(0) = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημεία $A(0,-1)$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$ημx = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2κπ + \frac{π}{6} \\ 2κπ + \frac{5π}{6} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}.$$

Είναι $0 \le x \le 2π \Leftrightarrow 0 \le 2κπ + \frac{π}{6} \le 2π \Leftrightarrow -\frac{π}{6} \le 2κπ \le \frac{11π}{6} \Leftrightarrow$

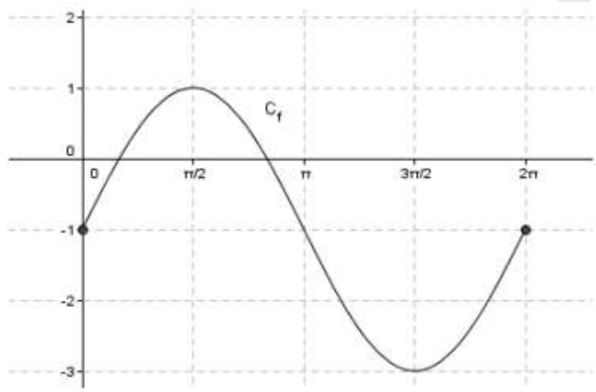
$-\frac{1}{12} \le κ \le \frac{11}{12} \overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ = 0$ άρα $x = \frac{π}{6}$.

Είναι $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \le 2\kappa\pi \le \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{12} \le \kappa \le \frac{7}{12} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}$.

γ)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	-1	0
$f(x)$	-1	1	-1	-3	-1



δ) $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha - 1 = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 1 \Leftrightarrow$

$2\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (A).

1ος τρόπος:

$(A) \Leftrightarrow \left(\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\ ,\ \kappa \in \mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\cancel{\alpha} = \kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + \cancel{\alpha} \Leftrightarrow \kappa\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow\right.$

$\left.\kappa\pi = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2}\ \text{ αδύνατη αφού } \kappa \in \mathbb{Z}\right)$.

Είναι $0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \frac{\kappa\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le \kappa \le \frac{1}{4} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$

άρα $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2ος τρόπος: $(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \etaμα = συνα$.

Αν $συνα = 0$ τότε από (Α) και $ημα = 0$ άρα $ημ^2α + συν^2α = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο.

Άρα για $συνα \neq 0$ είναι

$$(1) \Leftrightarrow \frac{ημα}{συνα} = 1 \Leftrightarrow εφα = εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow α = κπ + \frac{π}{4},\ κ \in \mathbb{Z}$$

Είναι $0 \leq x \leq \frac{π}{2} \Leftrightarrow 0 \leq κπ + \frac{π}{4} \leq \frac{π}{2} \Leftrightarrow -\frac{π}{4} \leq κπ \leq \frac{π}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq κ \leq \frac{1}{4} \overset{κ \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ = 0$

άρα $α = \frac{π}{4}$.

20870.α) Το διάστημα ανάμεσα στο πρώτο μέγιστο βάθος και στο πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 6 ώρες, που είναι η μισή περίοδος. Κατά συνέπεια η περίοδος είναι T = · = 2 6 12 ώρες και $T = \frac{2π}{ω} \Leftrightarrow 12ω = 2π \Leftrightarrow ω = \frac{π}{6}$.

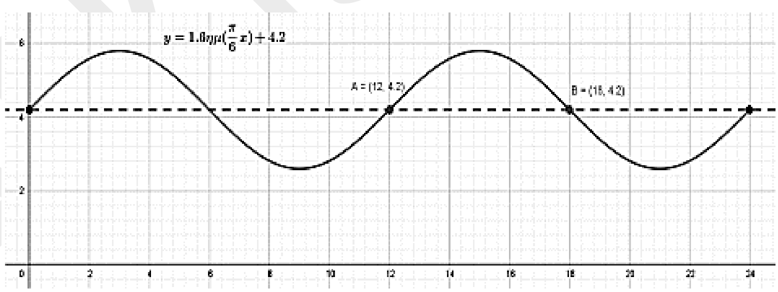
Είναι $-1 \leq ημ(ωt) \leq 1 \overset{α>0}{\Leftrightarrow} -α \leq αημ(ωt) \leq α \Leftrightarrow -$

$α + β \leq αημ(ωt) + β \leq α + β \Leftrightarrow -α + β \leq y \leq α + β$.

Επειδή το ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και το μέγιστο 5,8 μέτρα, είναι

$$\begin{cases} -α + β = 2,6 \ ^{(+)} \\ α + β = 5,8 \end{cases} \Rightarrow 2β = 8,4 \Leftrightarrow β = 4,2 \text{ και } α + 4,2 = 5,8 \Leftrightarrow α = 1,6 .$$

i. Η συνάρτηση έχει μέγιστο 5,8 , ελάχιστο 2, 6 και περίοδο 12, οπότε η γραφική της παράσταση σε διάστημα δυο περιόδων (0 $\leq t \leq$ 24) είναι:



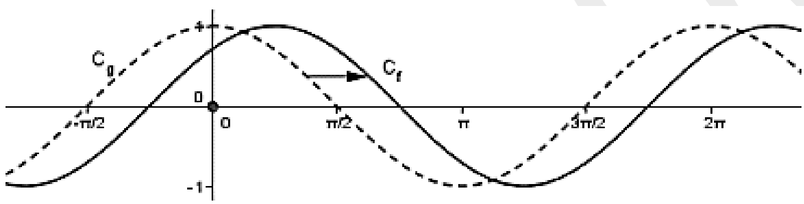
ii. Το βάθος του νερού, σε μέτρα, στις 12 το μεσημέρι είναι:

$$y = 1,6 \cdot ημ\left(\frac{π}{6} \cdot 12\right) + 4,2 = 1,6 \cdot 0 + 4,2 = 4,2 \cdot$$

iii. Όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $y=1,6\cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t)+4,2$, το πλοίο θα δέσει με ασφάλεια το χρονικό διάστημα [12,18], δηλαδή από τις 12 το μεσημέρι μέχρι τις 6 το απόγευμα, γιατί στο διάστημα αυτό το βάθος του νερού είναι $y \geq 4,2$.

20645.α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, άρα η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{\pi}{4}$ προς τα δεξιά.

β)



γ) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f(\pi)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

δ) $\sqrt{2}f(x)+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}f(x)=-1 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$

$x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi\pm\frac{3\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

20712.α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το – 3, άρα υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη και τη χαμηλότερη στάθμη είναι $3-(-3)=6$ μέτρα.

β) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να αρχίσει να επαναλαμβάνεται η γραφική παράσταση είναι 12 ώρες. Συνεπώς η f έχει περίοδο 12 ώρες.

γ) Η f έχει τύπο της μορφής $f(t)=\rho\eta\mu(\omega t)$, $\rho,\omega>0$, $t\geq 0$.

Επειδή η f έχει μέγιστο το 3, είναι ρ = 3.

Επειδή η f έχει περίοδο 12, είναι $\frac{2\pi}{\omega}=12 \Leftrightarrow 2\pi=12\omega \Leftrightarrow \omega=\frac{\pi}{6}$, άρα

$f(t)=3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)$, $t\geq 0$.

δ) $f(t)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\left(\frac{\pi t}{6}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi t=12\kappa\pi+\pi \Leftrightarrow t=12\kappa+1, \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$\left(\frac{\pi t}{6}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6}=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow\right.$

$\left.\pi t=12\kappa\pi+5\pi \Leftrightarrow t=12\kappa+5, \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

Επειδή μας ενδιαφέρει ποιες ώρες της ημέρας η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα, ισχύει ότι

$0\leq t\leq 24 \Leftrightarrow 0\leq 12\kappa+1\leq 24 \Leftrightarrow -1\leq 12\kappa\leq 23 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}\leq\kappa\leq\frac{23}{12}$.

Επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι κ = 0 ή κ = 1. Για κ = 0 είναι $t=12\cdot 0+1=1$ και για κ = 1 είναι $t=12\cdot 1+1=13$.

Όμοια $0\leq t\leq 24 \Leftrightarrow 0\leq 12\kappa+5\leq 24 \Leftrightarrow -5\leq 12\kappa\leq 19 \Leftrightarrow -\frac{5}{12}\leq\kappa\leq\frac{19}{12}$.

Επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$, είναι κ = 0 ή κ = 1. Για κ = 0 είναι $t=12\cdot 0+5=5$ και για κ = 1 είναι $t=12\cdot 1+5=17$.

20747.α) i. $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu\omega=-1 \Leftrightarrow -2\left(1-\eta\mu^2\omega\right)+\eta\mu\omega=-1 \Leftrightarrow$
$-2+2\eta\mu^2\omega+\eta\mu\omega+1=0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega+\eta\mu\omega-1=0$ (1)
Θέτουμε $\eta\mu\omega=x$ και η (1) γίνεται: $2x^2+x-1=0$ η οποία είναι 2ου βαθμού με ρίζες -1 και 1/2, άρα $\eta\mu\omega=-1$ ή $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$. Όμως $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα $0\le\eta\mu\omega\le1$, οπότε $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$.

Τότε $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6} \overset{\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \omega=\frac{\pi}{6}$. Είναι $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. $f\left(x\right)=3+\sqrt{3}\varepsilon\varphi\omega\cdot\eta\mu x=3+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\eta\mu x=3+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3}\eta\mu x=3+\eta\mu x$.
Είναι $-1\le\eta\mu x\le1 \Leftrightarrow 2\le3+\eta\mu x\le4 \Leftrightarrow 2\le f\left(x\right)\le4$, άρα η f έχει ελάχιστη τιμή το 2 όταν $\eta\mu x=-1$ και μέγιστη το 4 όταν $\eta\mu x=1$.
β) i. Με βάση το σχήμα, η g έχει ελάχιστο το 5 για x = 5.
ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $2\le f\left(x\right)\le4$, ενώ επειδή η g έχει ελάχιστο το 5, ισχύει ότι $g\left(x\right)\ge5$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f\left(x\right)<g\left(x\right)$, επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

21244. α) Η f έχει ελάχιστο το $-\frac{\alpha+1}{2}$, άρα
$-\frac{\alpha+1}{2}=-2 \Leftrightarrow \alpha+1=4 \Leftrightarrow \alpha=3$.
Η f έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\beta}$, άρα $\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\beta}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta=4$

β) $A=\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\pi-x\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi+x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(3\pi-x\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(-\varepsilon\varphi x\right)\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\pi-x\right)\cdot\sigma\varphi\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\left(-x\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\varepsilon\varphi x)\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\cdot-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\eta\mu(-x)}=$$

$$\frac{\cancel{-\sigma\upsilon\nu x}\cdot\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x}{\cancel{-\sigma\upsilon\nu x}\cdot\left[-\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)\right]\cdot(-\eta\mu x)}=$$

$$\frac{\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x}{-\varepsilon\varphi(-x)\cdot(-\eta\mu x)}=\frac{\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x}{\varepsilon\varphi x\cdot(-\eta\mu x)}=\frac{\cancel{\varepsilon\varphi x}\cdot\cancel{\eta\mu x}}{-\cancel{\varepsilon\varphi x}\cdot\cancel{\eta\mu x}}=-1$$

γ) $f(x)=2A\Leftrightarrow\frac{3+1}{2}\sigma\upsilon\nu4x=-2\Leftrightarrow2\sigma\upsilon\nu4x=-2\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu4x=-1\Leftrightarrow4x=2\kappa\pi+\pi\Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi+\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

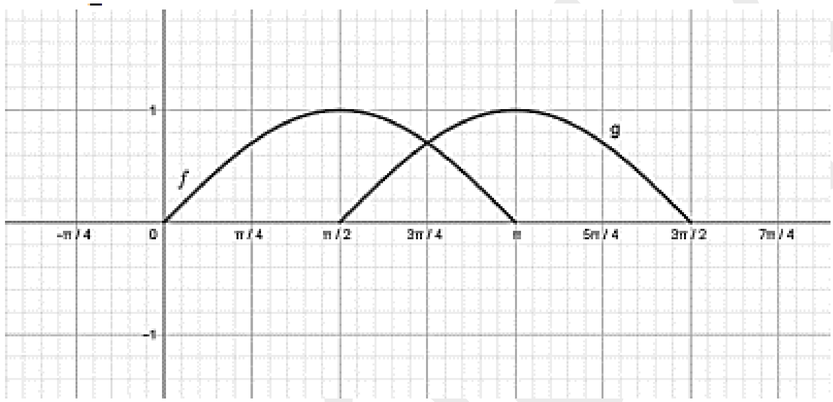
Είναι $\pi\le x\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\pi\le\frac{2\kappa\pi+\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow4\pi\le2\kappa\pi+\pi\le6\pi\Leftrightarrow$

$3\pi\le2\kappa\pi\le5\pi\Leftrightarrow3\le2\kappa\le5\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le\kappa\le\frac{5}{2}$

και επειδή ο κ είναι ακέραιος, είναι το 2. Άρα $x=\frac{4\pi+\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$.

Θέμα 3ο

15789.α) i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά $\frac{\pi}{2}$ μονάδες προς τα δεξιά.



ii) Είναι $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\etaμ\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\etaμ\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-συνx$ με

$$0\le x-\frac{\pi}{2}\le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2}$$

β) 1ος τρόπος:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \etaμx=\etaμ\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x}=2κ\pi+\cancel{x}-\frac{\pi}{2} \\ x=2κ\pi+\pi-x+\frac{\pi}{2} \end{cases},\ κ\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Αδύνατη} \\ x=κ\pi+\frac{3\pi}{4} \end{cases},\ κ\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x=κ\pi+\frac{3\pi}{4},\ κ\in\mathbb{Z}\ \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow}\ x=\frac{3\pi}{4}$$

2ος τρόπος: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \etaμx=-συνx\ (1)$. Έστω ότι $συνx=0$ τότε από την (1) είναι και $\etaμx=0$.

Επομένως $\etaμ^2x+συν^2x=1\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο, άρα $συνx\ne 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z} \overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{3\pi}{4}.$$

Πολυώνυμα

Πολυώνυμα
Θέμα 2ο

15113.α) Είναι

$P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 = -\cancel{2x^3} + 4x^2 + \cancel{2x^3} - 2 + 9 = 4x^2 + 7$,

οπότε το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού και όχι 3ου.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \alpha = 4$.

20640.α) Είναι $P(1) = 2 - 8 + 7 - 1 = 0$ άρα ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Αφού το πολυώνυμο Q(x) δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1 τότε $Q(1) \neq 0$

i) Είναι $R_1(1) = P(1) + Q(1) = 0 + Q(1) = Q(1) \neq 0$ άρα δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii) Είναι $R_2(1) = P(1) \cdot Q(1) = 0 \cdot Q(1) = 0$ άρα έχει ρίζα τον αριθμό 1.

21998.α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, οπότε το $P(x)$ είναι 1 + 6 = 7, δηλαδή 7ου βαθμού.

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^6+1) = 0 \Leftrightarrow (x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2)$ ή

$\left(x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 \text{ αδύνατη}\right)$

Διαίρεση πολυωνύμων
Θέμα 2ο

14981.α) $P(-2) = (-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$

β) Επειδή $P(-2) = 0$ το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

1	0	- 1	6	ρ= - 2
	- 2	4	- 6	
1	- 2	3	0	

γ) $P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$

15012.α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι

$P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4$

β) $P(x) = (x-3)(x^2+2) + 4 \Leftrightarrow$

$P(x) = x^3 + 2x - 3x^2 - 6 + 4 = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$

γ) Για να είναι το x = 3 ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ πρέπει $P(3) = 0 \Leftrightarrow$

$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{27} - \cancel{27} + 6 - 2 = 0$ αδύνατο. Άρα το x = 3 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15096.α) Είναι $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 \neq 0$ και

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3 \neq 0$ άρα δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x)=(x^2+x-1)(2x-1)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2-3x+1 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2} -2x^3-2x^2+2x & 2x-1 \\ \cline{1-1} -x^2-x+1 & \\ x^2+x-1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

15642.α) Είναι $P(1)=2(1-1)^{20}-3(1-1)^{10}+5\cdot 1^2-3\cdot 1-2=5-3-2=0$ άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) i. $P(0)=2(0-1)^{20}-3(0-1)^{10}+5\cdot 0^2-3\cdot 0-2=2-3-2=-3$

ii. Επειδή $P(0)\neq 0$ το x δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

15643.α) i. Είναι $P(3)=2\cdot 3^3-3\cdot 3^2-11\cdot 3+6=54-27-33+6=0$ άρα το $x-3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Με βάση τη διπλανή διαίρεση είναι $P(x)=(x-3)(2x^2+3x-2)$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2-11x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 & 2x^2+3x-2 \\ \cline{1-1} 3x^2-11x+6 & \\ -3x^2+9x & \\ \cline{1-1} -2x+6 & \\ +2x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

β)

$P(x)=(x-3)(2x^2+3x-2)=(x-3)(2x^2+4x-x-2)\Leftrightarrow$

$P(x)=(x-3)\big(2x(x+2)-(x+2)\big)=(x-3)(x+2)(2x-1)$,

επομένως το $(x-3)(2x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

20941.α) Είναι $P(-2)=(-2)^3+2(-2)^2+(-2)+3=-8+8-2+3=1\neq 0$, άρα το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι $\pi(x)=x^2+1$.

1	2	1	3	ρ= - 2
	- 2	0	- 2	
1	0	1	1	

γ) $P(x)=(x+2)(x^2+1)+1$

21997.α) Γνωρίζουμε ότι ο βαθμός του γινομένου μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το
άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, οπότε το $P(x)$ είναι 1 + 1 +1= 3, δηλαδή 3ου βαθμού.

β) Για $x\neq 2$ είναι

$P(x):(x-2)=\dfrac{P(x)}{(x-2)}=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}=(x-1)(x-3)$, οπότε το πηλίκο της διαίρεσης P(x): (x − 2) είναι $\pi(x)=(x-1)(x-3)$ και το υπόλοιπο υ(x) είναι μηδέν.

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

Θέμα 2ο

15040.α) Για να είναι το 1 ρίζα πρέπει $1^3-7\cdot 1+6=0 \Leftrightarrow 1-7+6=0$ ισχύει.

β) Είναι

$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$

1	0	- 7	6	ρ=1
	1	1	- 6	
1	1	- 6	0	

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι το x^2+x-6.

γ) $x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$$\left(x^2+x-6=0,\ \Delta=25,\ x=\frac{-1+5}{2}=2 \text{ ή } x=\frac{-1-5}{2}=-3\right).$$

15047.α) Είναι $P(1)=1^4-1^3-5\cdot 1^2+7\cdot 1-2=1-1-5+7-2=0$, άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $\pm 1, \pm 2$.

Είναι $P(-1)=(-1)^4-(-1)^3-5\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)-2=-12\neq 0$,

$P(2)=2^4-2^3-5\cdot 2^2+7\cdot 2-2=0$, άρα και το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

15175.α) Είναι $P(1)=1^3-1^2+1-1=0$ άρα το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

β) 1ος τρόπος: Εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $\rho=1$:

1	-1	1	-1	ρ=1
	1	0	1	
1	0	1	0	

Προκύπτει ότι $P(x)=(x-1)(x^2+1)$.

2ος τρόπος: $P(x)=x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$

15176.α) Είναι $P(1)=1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1-2=1-2+3-2=0$ άρα το 1 είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, οπότε το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Το τριώνυμο x^2-x+2 έχει Δ = - 7 < 0, άρα $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $P(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x+2)>0 \overset{x^2-x+2>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

15246.α) $P(x)=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=$

$(x+1)(x+1)(x-1)=(x+1)^2(x-1)$

β)

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+		+	
$x-1$	−		−	0	+	
$P(x)$	−	0	−	0	+	

$P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,+\infty)\cup\{-1\}$

15247.α) $P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+(2x-1) \Leftrightarrow$

$P(x)=(2x-1)(x^2+1)$.

β) $P(x)\ge 0\Leftrightarrow (2x-1)(x^2+1)\ge 0 \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} 2x-1\ge 0\Leftrightarrow 2x\ge 1\Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

15248.α) Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι
$P(x)=(2x-1)(x^2-2)+1\Leftrightarrow$
$P(x)=2x^3-4x-x^2+2+1=2x^3-x^2-4x+3$.

2	- 1	- 4	3	ρ=1
	2	1	- 3	
2	1	- 3	0	

β) i. Είναι $P(1)=2\cdot 1^3-1^2-4\cdot 1+3=0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι $P(x)=(x-1)(2x^2+x-3)$.

ii. $P(x)=0\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+x-3)=0\Leftrightarrow (x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ ή
$\left(2x^2+x-3=0,\ \Delta=1+24=25,\ x_1=\frac{-1+5}{4}=1,\ x_2=\frac{-1-5}{4}=-\frac{3}{2}\right)$.

15618.α) $P(x)=2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$

β) $P(x)=0\Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή
$\left(2x^2+x-1=0,\ \Delta=1+8=9,\ x_1=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-1-3}{4}=-1\right)$

15653.α) i.

1	1	2	2	ρ= - 1
	- 1	0	- 2	
1	0	2	0	

ii. $P(x)=(x+1)(x^2+2)$.

β) $P(x)<0\Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)<0 \overset{x^2+2>0}{\Leftrightarrow} x+1<0\Leftrightarrow x<-1$.

15654.α) Είναι $P(2)=2^3-7\cdot 2+6=8-14+6=0$ άρα το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β)

1	0	- 7	6	ρ=1
	1	1	- 6	
1	1	- 6	0	

$P(x)=0\Leftrightarrow x^3-7x+6=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6)=0\Leftrightarrow$
$(x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ ή
$\left(x^2+x-6=0,\ \Delta=25,\ x=\frac{-1+5}{2}=2 \text{ ή } x=\frac{-1-5}{2}=-3\right)$

3	-1	- 1	2	ρ=1
	3	2	1	
3	2	1	3	

15674α) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=3x^2+2x+1$ και το υπόλοιπο είναι 3, άρα
$P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$.

β) $P(x)<3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+1)+3<3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+1)<0$ (1)

Το τριώνυμο $3x^2+2x+1$ έχει διακρίνουσα Δ = - 8 < 0, άρα $3x^2+2x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$.

15695.α) Με βάση το σχήμα Horner είναι $P(x)=x^3+2x-3 \Leftrightarrow$ $P(x)=(x+1)(x^2+x+3)-6$.

1	0	2	-3	ρ= -1
	- 1	1	-3	
1	-1	3	-6	

β) $P(x)+6=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+x+3)-6+6=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x^2+x+3)=0 \Leftrightarrow (x+1=0 \Leftrightarrow x=-1)$ ή

$(x^2+x+3=0,\ \Delta<0$ αδύνατη$)$.

15989.α) Είναι $P(1)=1, P(-1)=3\neq 0, P(-2)=-8\neq 0,$

$P(2)=0, P(4)=28\neq 0, P(-4)=-84\neq 0$ οπότε έχει μοναδική ρίζα το2.

β) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-2x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-2(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x=2)$ ή $(x=\pm\sqrt{2})$.

17241.α) Ι. Επειδή $P(-1)=(-1)^3-1+2=-1-1+2=0$ το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x+1)$.

ΙΙ. Με βάση το διπλανό σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=x^2-x+2$ και το υπόλοιπο είναι 0, άρα

$P(x)=(x+1)(x^2-x+2)$

1	0	1	2	ρ= -1
	- 1	1	- 2	
1	- 1	2	0	

β) Το τριώνυμο x^2-x+2 έχει διακρίνουσα Δ= - 7 < 0, άρα $x^2-x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$P(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+2)<0 \Leftrightarrow x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$.

18583.α) i. Με βάση το σχήμα Horner είναι $\pi(x)=2x^2+3x-2$ και υ = 0.

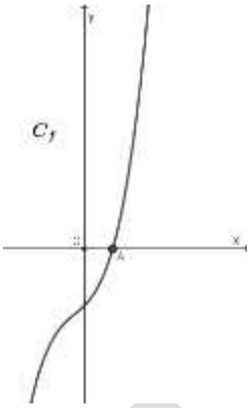
ii. $P(x)=(x-2)(2x^2+3x-2)$

2	-1	-8	4	ρ= 2
	-4	6	- 4	
2	3	-2	0	

β) $P(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left(2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\right)$ ή

$(x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2)$.

20856. α) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -1 που είναι το 1 και το – 1. Είναι $f(1)=2+1+1-1=3\neq 0$ και $f(-1)=-2+1-1-1=-3\neq 0$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.



β) i. Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x μόνο στο σημείο Α, η τετμημένη του Α είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Είναι $f(1)=3>0$ και $f(0)=-1<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα που προσδιορίζει τη ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση, υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 0 και 1.

18230.α) Είναι
$P(2)=2\cdot 2^3+2^2-8\cdot 2-4=16+4-16-4=0$ άρα το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Είναι $P(x)=2x^3+x^2-8x-4=x^2(2x+1)-4(2x+1)\Leftrightarrow$
$P(x)=(2x+1)(x^2-4)=(2x+1)(x-2)(x+2)$.

γ) $P(x)=0\Leftrightarrow(2x+1)(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow\left(2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\right)$ ή
$(x-2=0\Leftrightarrow x=2)$ ή $(x+2=0\Leftrightarrow x=-2)$.

Θέμα 4ο

14955.α) Για x = 2 εκατομμύρια χρόνια, είναι
$T(2)=2^3-10\cdot 2^2+31\cdot 2-30=8-40+62-30=0\ {}^oC$.

β) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι
$T(x)=(x-2)(x^2-8x+15)$

1	-10	31	-30	ρ=2
	2	-16	30	
1	-8	15	0	

Το τριώνυμο $x^2-8x+15$ έχει διακρίνουσα Δ= 4 και ρίζες $x_1=3,\ x_2=5$, οπότε $x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$, άρα $T(x)=(x-2)(x-3)(x-5)$, οπότε α = 2, β = 3, γ = 5.

γ) Θέλουμε να βρούμε τα διαστήματα για τις τιμές x των οποίων θα είναι $T(x)<0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου των τιμών T(x) για θετικές τιμές του x.

x	$-\infty$ 2	3	5	$+\infty$
$x-2$	− 0	+	+	+
$x^2-8x+15$	+	+ 0	− 0	+
$T(x)$	− 0	+ 0	− 0	+

Διαπιστώνουμε ότι παγετώνες θα υπάρχουν στον πλανήτη τα δύο πρώτα εκατομμύρια χρόνια και την χρονική περίοδο από τρία έως πέντε εκατομμύρια χρόνια.

15005.α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(-x)=(-x)^6-3(-x)^2+2=x^6-3x^2+2=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) $f(x)=0\Leftrightarrow x^6-3x^2+2=0$ (1)

Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^3-3\omega+2=0$.

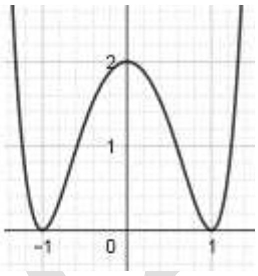
1	0	- 3	2	ρ= 1
	1	1	-2	
1	1	- 2	0	

Παρατηρούμε ότι $1^3-3\cdot 1+2=0$, οπότε με βάση το σχήμα Horner η εξίσωση γίνεται $(\omega-1)\left(\omega^2+\omega-2\right)=0 \Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega^2+\omega-2=0$

Το τριώνυμο $\omega^2+\omega-2$ έχει ρίζες $\omega=1$ ή $\omega=-2$ που απορρίπτεται.

Άρα $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Επομένως η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία (1,0) και (- 1, 0).



γ) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y′y, οπότε έχει την διπλανή μορφή.

δ)Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[1,+\infty)$.

15037.α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$, άρα $A_f=[-3,+\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g και επειδή κοινό τους σημείο είναι το (1,2), έχουμε: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=1$.

γ) i. Η ανίσωση f(x) < g(x) λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x, όπου η C_f είναι κάτω από Cg . Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x\in(1,+\infty)$.

ii. $f(x)<g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3}<3x-1$ (1)

Αν $3x-1<0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$, άρα $x\in\left[-3,\frac{1}{3}\right)$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $3x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{3}$ η (1) γίνεται

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2<(3x-1)^2 \Leftrightarrow x+3<9x^2-6x+1 \Leftrightarrow 9x^2-7x-2>0 \Leftrightarrow$$

$x\in\left(-\infty,-\frac{2}{9}\right)\cup(1,+\infty)$. Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x\in(1,+\infty)$.

15066.α) i. Είναι $P(0)=2\neq 0$ οπότε το 0 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

ii. Ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν

$P(\rho)=0 \Leftrightarrow 2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0$ (1)

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, αν και μόνο αν

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\rho}\right)^4-5\left(\frac{1}{\rho}\right)^3+4\left(\frac{1}{\rho}\right)^2-5\frac{1}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\frac{1}{\rho^4}-5\frac{1}{\rho^3}+4\frac{1}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\cancel{\rho^4}\frac{1}{\cancel{\rho^4}}-5\rho^{\cancel{4}}\frac{1}{\cancel{\rho^3}}+4\rho^{\cancel{4}^2}\frac{1}{\cancel{\rho^2}}-\rho^{\cancel{4}^3}\frac{5}{\cancel{\rho}}+2\rho^4=0\Leftrightarrow$$

$2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4=0$ που ισχύει λόγω της (1).

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι $\pm 1, \pm 2$. Επειδή θέλουμε θετική ρίζα, πιθανές είναι το 1 και το 2. Είναι

$P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=16-40+16-10+2=0$ οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα Horner, είναι

2	- 5	4	- 5	2	ρ= 2
	4	- 2	4	- 2	
2	- 1	2	- 1	0	

$P(x)=(x-2)\left(2x^3-x^2+2x-1\right)\Leftrightarrow$

$P(x)=(x-2)\left[x^2(2x-1)+(2x-1)\right]=(x-2)(2x-1)\left(x^2+1\right)$

$P(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(2x-1)\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow$

$(x-2=0\Leftrightarrow x=2)$ ή

$\left(2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\right)$ ή

$\left(x^2+1=0\Leftrightarrow\right.$

$\left.x^2=-1 \text{ αδύνατη}\right)$

x	$-\infty$ 1/2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$2x-1$	$-$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$-$	$+$

δ) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι

$P(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$.

15094.α) $S(0)=0,\ S(t)=2\cdot 2^3-6\cdot 2^2+10\cdot 2=16-24+20=12$ μέτρα.

β)

1	- 3	5	- 15	ρ= 3
	3	0	15	
1	0	5	0	

$S(t)=30\Leftrightarrow 2t^3-6t^2+10t=30\Leftrightarrow$

$t^3-3t^2+5t-15=0\Leftrightarrow$

$(t-3)\left(t^2+5\right)=0\Leftrightarrow t=3$ ή $t^2=-5$ αδύνατο.

γ) Είναι $S(t)=2t^3-6t^2+10t=2t\left(t^2-3t+5\right)$

Το τριώνυμο t^2-3t+5 έχει Δ = - 11 < 0, οπότε για κάθε $t\geq 0$ είναι $t^2-3t+5>0$, οπότε και $S(t)\geq 0$.

δ) Με βάση το φυσικό πλαίσιο του προβλήματος, η συνάρτηση $S(t)$ πρέπει να είναι μη αρνητική και σε κανένα χρονικό διάστημα γνήσια φθίνουσα. Επομένως, είναι:

Η (Ι) είναι μεν μη αρνητική, αλλά δε διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας.

Η (ΙΙ) παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η (ΙΙΙ) είναι μη αρνητική και γνησίως αύξουσα παντού, ως εκ τούτου αποτελεί την ενδεδειγμένη απάντηση.

15174.α) Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3 \qquad\qquad +\alpha x-4 & x^2-3x+2 \\ \hline -x^4+3x^3-2x^2 & x^2+4x+10 \\ \cline{1-1} \quad 4x^3-2x^2+\alpha x-4 & \\ \quad -4x^3+12x^2-8x & \\ \cline{1-1} \qquad 10x^2+(\alpha-8)x-4 & \\ \qquad -10x^2+30x-20 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad (\alpha+22)x-24 & \end{array}$$

$$P(x)=\delta(x)(x^2+4x+10)+(\alpha+22)x-24$$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει

$(\alpha+22)x-24=24x-24 \Leftrightarrow \alpha+22=24 \Leftrightarrow \alpha=2$

β) Για α = 2 είναι $P(x)=x^4+x^3+2x-4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι το $P(1)=1^4+1^3+2\cdot1-4=0$

ii. $P(x)=0 \Leftrightarrow$

1	1	0	2	-4	ρ= 1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

$x^4+x^3+2x-4=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^3+2x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x^3+2x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)+2(x+2)=0 \Leftrightarrow$

$(x+2)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x^2+2=0$ αδύνατη.

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι τα (- 2,0) και (1,0).

iii.

$P(x)<0 \Leftrightarrow -2<x<1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2+2	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

15250.α)

$$\begin{array}{l|l} x^5-4x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-4 \\ \hline -x^5+4x^3 & x^3-1 \\ \cline{1-1} \qquad -x^2+\alpha x+\beta & \\ \qquad\ x^2 \qquad -4 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad \alpha x+\beta-4 & \end{array}$$

β) Πρέπει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι $\alpha x+\beta-4=4x+1$ και αυτό ισχύει όταν α=4 και $\beta-4=1 \Leftrightarrow \beta=5$.

γ) i. $P(x)=(x^2-4)(x^3-1)+4x+1$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

ii. $P(x) < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^3-1) + 4x + 1 < 4x + 1 \Leftrightarrow$ (1)

$(x^2-4)(x-1)(x^2+x+1) < 0$

το τριώνυμο x^2+x+1 έχει $\Delta < 0$ οπότε

$x^2+x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι λύσεις της (1) είναι $x \in (-\infty,-2) \cup (1,2)$.

15436. Είναι $AM = x$, $AB = 2$ και $MK = AK - AM = 4 - x$.

Πρέπει $\begin{cases} AM \geq 0 \\ MK \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0,4]$.

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο BAM προκύπτει:

$BM^2 = AB^2 + AM^2 \Leftrightarrow BM^2 = 4 + x^2 \overset{BM \geq 0}{\Leftrightarrow} BM = \sqrt{4+x^2}$

β) Ο χρόνος κίνησης από το B στο M είναι $t_1 = \dfrac{BM}{u_k} = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{3}$ και ο χρόνος κίνησης από το M στο K είναι $t_2 = \dfrac{MK}{u_\tau} = \dfrac{4-x}{5}$. Άρα είναι

$t(x) = t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \dfrac{4-x}{5}$, $x \in [0,4]$.

γ) Είναι $t(x) = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{3} + \dfrac{4-x}{5} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} + 3(4-x) = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} + 12 - 3x = 20 \Leftrightarrow 5\sqrt{4+x^2} = 3x + 8$ (1)

Αφού $x \in [0,4]$ τότε $3x + 8 > 0$ άρα

$(1) \Leftrightarrow 25(4+x^2) = (3x+8)^2 \Leftrightarrow 100 + 25x^2 = 9x^2 + 48x + 64 \Leftrightarrow$

$16x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow (4x-6)^2 = 0 \Leftrightarrow 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ δεκτή.

Άρα το σημείο M θα απέχει 1,5 Km από το σημείο A.

15431.α) i. Επειδή το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x-1)$, ισχύει ότι

$P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 + \alpha + \beta - 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3$

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το $(x-2)$ είναι –1, ισχύει ότι

$P(2) = -1 \Leftrightarrow 16 + 4\alpha + 2\beta - 5 = -1 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = -12 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -6$. Άρα

$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}$.

ii. $\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3 - \alpha = -6 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 3 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -9 \\ \beta = 3 - (-9) = 12 \end{cases}$

β) Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

2	- 9	12	-5	ρ= 1
	2	- 7	5	
2	- 7	5	0	

$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = (x-1)(2x^2 - 7x + 5)$.

Το τριώνυμο $2x^2-7x+5$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες $x=1$ ή $x=\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		1		$5/2$		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-7x+5$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ είναι κάτω από τον άξονα x΄x όταν $P(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup\left(1,\frac{5}{2}\right)$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία $(1,0)$ και $\left(\frac{5}{2},0\right)$, οπότε βλέπουμε ότι η P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[2,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2]$.

15677.α) Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο Q(x) , θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-2x+1 \\ \hline
-x^4+2x^3-x^2 & x^2-2 \\ \hline
-2x^2+\alpha x+\beta & \\
2x^2-4x+2 & \\ \hline
(\alpha-4)x+\beta+2 & \\ \hline
\end{array}
$$

$\begin{cases}\alpha-4=0\\ \beta+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-2\end{cases}$.

β) i. Είναι $P(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+4x-2 & x^2+5 \\ \hline
-x^4\qquad -5x^2 & x^2-2x-6 \\ \hline
-2x^3-6x^2+4x-2 & \\
2x^3\qquad +10x & \\ \hline
-6x^2+14x-2 & \\
6x^2\qquad +30 & \\ \hline
14x+28 & \\ \hline
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$P(x)=(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28$

ii. $P(x)=14(x+2)\Leftrightarrow$

$(x^2+5)(x^2-2x-6)+14x+28=14x+28\Leftrightarrow$

$(x^2+5)(x^2-2x-6)=0\Leftrightarrow$

$\left(x^2+5=0\Leftrightarrow x^2=-5 \text{ αδύνατη}\right)$ ή $\left(x^2-2x-6=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}\right)$.

15960.α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x)=f(x) \Leftrightarrow (-x)^4+\kappa(-x)-1=x^4+\kappa x-1 \Leftrightarrow$

$x^4-\kappa x-1=x^4+\kappa x-1 \Leftrightarrow -\kappa=\kappa \Leftrightarrow 2\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa=0$

β) Για $\kappa=0$ είναι $f(x)=x^4-1$.

i. Για κάθε $x_1<x_2\le 0$ είναι

$x_1^4>x_2^4 \Leftrightarrow x_1^4-1>x_2^4-1 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow$ $f \searrow (-\infty,0]$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^4 \ge 0 \Leftrightarrow x^4-1 \ge -1 \Leftrightarrow f(x) \ge -1 = f(0)$.

iii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $f(x)<0 \Leftrightarrow x^4-1<0 \Leftrightarrow x^4<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

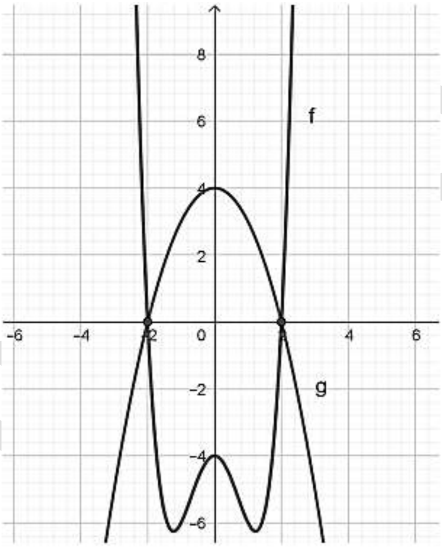
15790.α) Οι συναρτήσεις f,g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και είναι :

$f(-x)=(-x)^4-3(-x)^2-4=$

$x^4-3x^2-4=f(x)$ και

$g(-x)=-(-x)^2+4=$

$-x^2+4=g(x)$



β) Οι συναρτήσεις f,g είναι άρτιες άρα οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

γ) i) Γραφικά παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες -2 και 2 άρα $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Αλγεβρικά έχουμε

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=-x^2+4 \Leftrightarrow x^4-2x^2-8=0 \quad (1)$

Θέτουμε $x^2=y\ge 0$ και είναι $(1) \Leftrightarrow y^2-2y-8=0$

με διακρίνουσα $\Delta=36$ και ρίζες $y_1=-2$, η οποία απορρίπτεται και $y_2=4$ δεκτή.

Άρα $y=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

ii) Γραφικά παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της g στο διάστημα $(-2,2)$. Άρα $f(x)<g(x) \Leftrightarrow x \in (-2,2)$.

Αλγεβρικά ομοίως θέτουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα $x^2=y\ge 0$

και είναι $y^2-2y-8<0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-2,4) \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y<4 \Leftrightarrow 0 \le x^2<4 \Leftrightarrow$

$|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

17919.α) Η ευθεία ΑΒ είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$ με $\alpha \ne 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$.

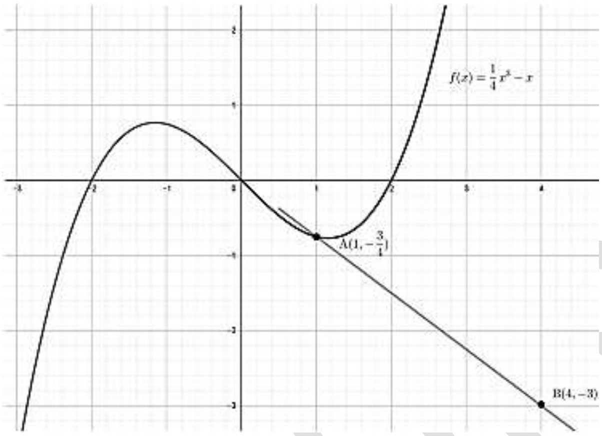
Διέρχεται από τα σημεία $A\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και

$B(4,-3)$ άρα προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases}-\dfrac{3}{4}=\alpha+\beta\\ -3=4\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=4\alpha+4\beta\\ -3=4\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-3-4\alpha=4\beta\\ -3-4\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=4\beta\\ -3-4\alpha=\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Άρα η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y=-\dfrac{3}{4}x$.



β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-f(x)$$

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

γ) 1^ος^ τρόπος: Είναι $f(0)=0$ και

$f(-1)=-f(1)=\dfrac{3}{4}$ και λόγω συμμετρίας της f ως προς την αρχή των αξόνων και αφού αυτά είναι σημεία

και της ευθείας τότε τα κοινά σημεία της ευθείας με την συνάρτηση f είναι τα

$A\left(1,-\dfrac{3}{4}\right)$, $O(0,0)$, $K\left(-1,\dfrac{3}{4}\right)$.

2^ος^ τρόπος:

$$f(x)=-\frac{3}{4}x\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}x\Leftrightarrow x^3-4x=-3x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow$$

$$x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } \left(x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\right)$$

17943.α) Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με μήκη x και y αντίστοιχα και υποτείνουσα με μήκος $x+2$. Επίσης έχει εμβαδόν

$$E=60\Leftrightarrow\frac{xy}{2}=60\overset{x>0}{\Leftrightarrow}y=\frac{120}{x}$$

Πρέπει $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \dfrac{120}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι

$$(x+2)^2=x^2+y^2\Leftrightarrow\cancel{x^2}+4x+4=\cancel{x^2}+\frac{14400}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow4x^3+4x^2-14400=0\Leftrightarrow x^3+x^2-3600=0$$

β) Οι πιθανές ακέραιες και θετικές (x>0) ρίζες της εξίσωσης $x^3+x^2-3600=0$, οι οποίες είναι μικρότερες του 16 είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15.
Δοκιμάζοντας τις τιμές 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12 παρατηρούμε ότι δεν είναι ρίζες.
Βάζοντας το 15 είναι
$15^3+15^2-3600=15^2(15+1)-3600=225\cdot 16-3600=0$
Άρα η μία κάθετη έχει μήκος 15 cm , η δεύτερη μήκος 8 cm και η υποτείνουσα μήκος 17 cm
γ) Εκτελούμε την διαίρεση $\left(x^3+x^2-3600\right):(x-15)$:

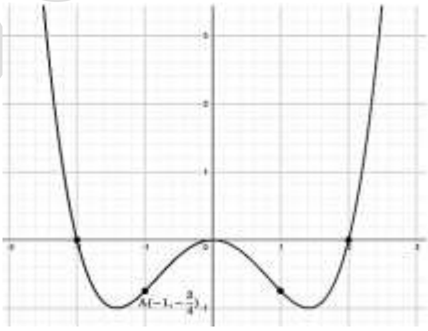
$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2+0x-3600 & x-15 \\ \cline{2-2}
-x^3+15x^2 & x^2+16x+240 \\ \hline
16x^2+0x-3600 & \\
-16x^2+240x & \\ \hline
240x-3600 & \\
-240x+3600 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Είναι $x^3+x^2-3600=0 \Leftrightarrow (x-15)\left(x^2+16x+240\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=15$ ή $x^2+16x+240=0$ αδύνατη γιατί έχει διακρίνουσα
$\Delta=256-240=-704<0$
Άρα υπάρχει μόνο ένα τέτοιο ορθογώνιο τρίγωνο.

17925.α) Από το σχήμα είναι $f(-2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2)^4+\alpha(-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$\frac{16}{4}+4\alpha=0 \Leftrightarrow 4\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=-1$



β) i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $-x\in\mathbb{R}$ και
$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2=$
$\frac{1}{4}x^4-x^2=f(x)$
ii) Η f είναι άρτια σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα άρα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y.
β) $f\left(-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{3}^4-\sqrt{3}^2=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$

18221.α) i. Για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $(AB)=\alpha-(-\alpha)=2\alpha$ και

$(A\Delta)=y_\Delta=3-\alpha^2$, άρα $E=f(\alpha)=(AB)(A\Delta)=2\alpha\left(3-\alpha^2\right)=-2\alpha^3+6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.
ii. Για α = 1 είναι $E=f(1)=-2+6=4$ τετραγωνικές μονάδες.
β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι

$E\le 4 \Leftrightarrow -2\alpha^3+6\alpha\le 4 \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha+2\ge 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-1)\left(\alpha^2+\alpha-2\right)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)\left(\alpha^2-1+\alpha-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow$

1	0	- 3	2	ρ= 1
	1	1	- 2	
1	1	- 2	0	

$(\alpha-1)\left[(\alpha-1)(\alpha+1)+(\alpha-1)\right]\geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha+1+1)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2(\alpha+1)\geq 0$ που ισχύει

γ) Επειδή $f(\alpha)\leq 4=f(1)$, το εμβαδό έχει μέγιστη τιμή το 4 για α = 1.

18696.α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[0,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0]$.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών τους παραστάσεων, επομένως

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=-4$ ή $x=0$ ή $x=1$.

Αλγεβρικά: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=4x-4\Leftrightarrow$

$x^3+3x^2-4x=0\Leftrightarrow x\left(x^2+3x-4\right)=0\Leftrightarrow$

$x=0$ ή $\left(x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-4\right)$

γ)

x	$-\infty$	-4		0		1	$+\infty$
x	–		–	0	+		+
x^2+3x-4	+	0	–		–	0	+
Γινόμενο	–	0	+	0	–		+

$g(x)<f(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0\Leftrightarrow x\left(x^2+3x-4\right)>0\Leftrightarrow$

$x\in(-4,0)\cup(1,+\infty)$

21155.α) Είναι

1	2	1	2	ρ= - 2
	-2	0	- 2	
1	0	1	0	

$P(x)=x^3+2x^2+x+2=(x+2)\left(x^2+1\right)$.

$P(x)=0\Leftrightarrow(x+2)\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow(x+2=0\Leftrightarrow x=-2)$ ή

$\left(x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=-1 \text{ αδύνατη}\right)$.

Επομένως το $P(x)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό -2.

β) Είναι $P(x)=x^3-x^2+bx+c$. Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το (x-1) όταν

$P(1)=0\Leftrightarrow 1-1+b+c=0\Leftrightarrow c=-b$.

Οποιοδήποτε αριθμό επιλέξει ο Β για το b, ο Α επιλέγει τον αντίθετό του και εξασφαλίζει να έχει παράγοντα το (x-1) το $P(x)$.

γ) Είναι $P(x)=x^3+\alpha x^2+bx-1$.

Είναι $P(0)=-1<0$ και $P(1)=a+b$.

Βλέπουμε ότι οποιοδήποτε αριθμό επιλέξει ο Β για το b, ο Α έχει τη δυνατότητα να επιλέξει έναν μεγαλύτερο από τον αντίθετό του, γιατί τότε $\alpha>-b\Leftrightarrow\alpha+b>0\Leftrightarrow P(1)>0$ και έτσι η εξίσωση θα έχει σίγουρα ρίζα στο (0,1).

δ) $P(x)=x^3+\alpha x^2+bx+2022$.

Για να έχει το πολυώνυμο ρίζα το 13 θα πρέπει αυτός ο αριθμός να είναι διαιρέτη του 2022, το οποίο όμως δεν συμβαίνει. Άρα όπως και να επιλεγούν οι συντελεστές α και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ρίζα τον αριθμό 13.

22013. α) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow x^4+1=0 \Leftrightarrow x^4=-1$ αδύνατη, άρα το πολυώνυμο P(x) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

β) $x^4+1=\left(x^2+\alpha x+1\right)\cdot\left(x^2+\beta x+1\right) \Leftrightarrow$

$$x^4+1=x^4+\beta x^3+x^2+\alpha x^3+\alpha\beta x^2+\alpha x+x^2+\beta x+1 \Leftrightarrow$$

$$x^4+1=x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+2)x^2+(\alpha+\beta)x+1$$

Η τελευταία ισότητα αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha\beta+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \alpha(-\alpha)=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ -\alpha^2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \alpha^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-\alpha\\ \alpha=\pm\sqrt{2}\end{cases}.$$

Αν $\alpha=\sqrt{2}$, τότε $\beta=-\sqrt{2}$ και αν $\alpha=-\sqrt{2}$ τότε $\beta=\sqrt{2}$.

Επομένως $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$

γ) Η πρόταση είναι λάθος γιατί από το προηγούμενο σκέλος έχουμε ότι $P(x)=x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ και γνωρίζουμε ότι το

$P(x)$ δεν έχει ρίζες, καθώς και τα δύο πολυώνυμα 2ου βαθμού στα οποία παραγοντοποιήθηκε δεν έχουν ρίζες αφού έχουν διακρίνουσα $\Delta = -2 < 0$.

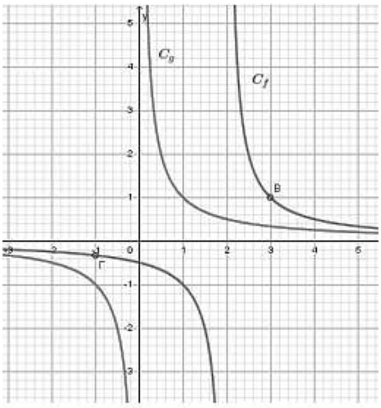
20859.α) Η f ορίζεται όταν $x^3-4x^2+x+6\neq 0 \Leftrightarrow$

1	- 4	1	6	ρ= -1
	-1	5	- 6	
1	- 5	6	0	

$(x+1)\left(x^2-5x+6\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left(x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1\right)$ και

$\left(x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ και } x\neq 3\right)$. $A_f=\mathbb{R}-\{-1,2,3\}$.

β) Επειδή $1\in A_f$ και $-1\notin A_f$ η f δεν είναι άρτια ή περιττή.



γ) i. $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+x+6}=\dfrac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)\cancel{(x-3)}}=\dfrac{1}{x-2}$.

ii. Είναι $f\left(x\right)=g\left(x-2\right)$, οπότε η γραφική παράσταση της f
προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση
της g κατά 2 μονάδες δεξιά.

δ) $\left|\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-2}}\right|=1\Leftrightarrow\left|x-2\right|=1\Leftrightarrow x-2=\pm1\Leftrightarrow$

$\left(x-2=1\Leftrightarrow x=3\right)$ ή $\left(x-2=-1\Leftrightarrow x=1\right)$.

37475.α) $P\left(x\right)=2x^3-x^2-2x+1=x^2\left(2x-1\right)-\left(2x-1\right)\Leftrightarrow$

$P\left(x\right)=\left(2x-1\right)\left(x^2-1\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(2x-1\right)\Leftrightarrow$

$P\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(2x^2-x+2x-1\right)=\left(x-1\right)\left(2x^2+x-1\right)$.

β)

x	$-\infty$		-1		$1/2$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+x-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

$P\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

γ) $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\overset{\text{συνx}\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow}$ $\text{συν}0>\text{συν}\theta>\text{συν}\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\text{συν}\theta<1$

δ) Επειδή $\text{συν}\theta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι $P(\text{συν}\theta)<0$.

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές
Θέμα 4ο

15187.α) Θέτουμε ημω = x και η εξίσωση γράφεται:

$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 6, δηλαδή οι ±1, ±2, ±3, ±6.

Με δοκιμή διαπιστώνουμε ότι ο −1 είναι ρίζα.

5	- 8	- 7	6	ρ= - 1
	-5	13	-6	
5	- 13	6	0	

$5x^3 - 8x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(5x^2 - 13x + 6) = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1)$ ή $\left(5x^2 - 13x + 6 = 0,\ \Delta = 49,\ x_1 = 2,\ x_2 = \frac{3}{5}\right)$

Επειδή $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$, είναι 0 < ημω < 1, άρα $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

β) i. Ισχύει ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \overset{\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$

ii. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο γνωρίζουμε ότι το σημείο Β έχει συντεταγμένες (συνω, ημω), άρα

$B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά του Β ως προς τον άξονα y′y και την αρχή Ο αντίστοιχα. Οπότε είναι: $\Gamma\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\Delta\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

iii. Το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών ΑΟΒ, ΑΟΓ και ΑΟΔ είναι οι τεταγμένες και οι τετμημένες των σημείων Β, Γ και Δ αντίστοιχα. Άρα,

$\eta\mu AOB = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu AOB = \frac{4}{5}$, $\eta\mu AO\Gamma = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu AO\Gamma = -\frac{4}{5}$ και

$\eta\mu AO\Delta = -\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu AO\Delta = -\frac{4}{5}$

15270.α) Από το σχήμα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν x = 0.

β) Είναι $\alpha < \frac{1}{4} \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f(\alpha) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\alpha) > 1 \Leftrightarrow 2f(\alpha) - 1 > 0$

και $\beta > \frac{1}{4} \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\beta) < f\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f(\beta) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\beta) < 1 \Leftrightarrow 2f(\beta) - 1 < 0$, άρα

$P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1) < 0$

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωση $f(x) = 2x$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = 2x \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0$ (1)

Θέτουμε $\sqrt{x} = u \geq 0$, οπότε $x = u^2$ και η (1) γίνεται: $2u^2 + u - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ= 9 και ρίζες $u=-1$ απορρίπτεται ή $u=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

15377.α) Ο όγκος της κυβικής δεξαμενής Α υπολογίζεται από τον τύπο του όγκου κύβου, δηλαδή $V_A(x)=x^3$

και ο όγκος της δεξαμενής Β, από τον τύπο του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, $V_B(x)=(x+1)\cdot x^2$

Είναι $\Delta(x)=V_B(x)-V_A(x)=(x+1)\cdot x^2-x^3=x^3+x^2-x^3=x^2$.

β) i. $V_B(x)=36\Leftrightarrow x^3+x^2-36=0\Leftrightarrow$

$(x-3)(x^2+4x+12)=0\Leftrightarrow(x-3=0\Leftrightarrow x=3)$ ή

$\left(x^2+4x+12=0 \text{ αδύνατη γιατί έχει } \Delta<0\right)$

Η διάσταση της δεξαμενής Α είναι x = 3 μέτρα. Οι διαστάσεις της δεξαμενής Β είναι 3 μέτρα, 3 μέτρα και 4 μέτρα.

ii. Η διαφορά των όγκων είναι $\Delta(x)=3^2=9$ κυβικά μέτρα.

γ) Η νέα δεξαμενή Γ θα έχει όγκο $V_\Gamma(x)=(x+1)(x+2)x$.

$V_\Gamma(x)\geq 60\Leftrightarrow(x+1)(x+2)x\geq 60\Leftrightarrow(x^2+x)(x+2)-60\geq 0\Leftrightarrow$

$x^3+2x^2+x^2+2x-60\geq 0\Leftrightarrow$

$x^3+3x^2+2x-60\geq 0\Leftrightarrow(x-3)(x^2+6x+20)\geq 0$ (1)

Το τριώνυμο $x^2+6x+20$ έχει Δ < 0, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+6x+20>0$, οπότε η (1) γίνεται: $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$.

Επομένως, η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι το 3, που είναι και η ζητούμενη ακμή.

17941. α) Η εξίσωση (1) ορίζεται όταν

$\begin{cases}2-x\geq 0\\ x+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\ x\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-2,2]$.

β) Για α = 0 η εξίσωση γίνεται:

$\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=0\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=-\sqrt{x+2}$ (2).

Επειδή για κάθε $x\in[-2,2]$ είναι $\sqrt{2-x}\geq 0$ και $-\sqrt{x+2}\leq 0$ η (1) αληθεύει μόνο όταν $\begin{cases}\sqrt{2-x}=0\\ -\sqrt{x+2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-2\end{cases}$ αδύνατο. Συνεπώς, η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) Η g έχει πεδίο ορισμού $A=[-2,2]$. Για κάθε $x\in A$ είναι και $-x\in A$ και $g(-x)=\sqrt{2+x}+\sqrt{-x+2}=g(x)$, άρα η g είναι άρτια.

δ) i. Για $\alpha=2\sqrt{2}$ η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{2}$ και για κάθε $x\in[-2,2]$, είναι:

$\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow 2-x+2\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x+2}+x+2=8\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{(2-x)(x+2)}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(x+2)}=2 \Leftrightarrow 4-x^2=4 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

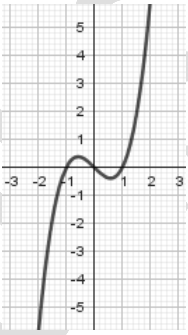
Άρα έχει μοναδική ρίζα την x=0.

ii. Για $\alpha \neq 2\sqrt{2}$ η εξίσωση αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2,2]$ τότε $g(\rho)=0$.

Επειδή η g είναι άρτια ισχύει ότι $g(-\rho)=g(\rho)=0$, οπότε και η x=– ρ θα είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

18111.α) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$, άρα η h είναι περιττή.

ii. Επειδή η h είναι περιττή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, οπότε σχεδιάζουμε το συμμετρικό σχήμα ως προς το (0,0).



iii. $h(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $\left(x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1\right)$.

Η γραφική παράσταση της h τέμνει τον x΄x στα σημεία (-1,0), (0,0) και (1,0).

β) Για $x \geq 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y=x$ όταν

$g(x)>x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}>x \Leftrightarrow x>x^3 \Leftrightarrow x^3-x<0 \Leftrightarrow h(x)<0$,

δηλαδή αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

18713.α) $P(1)=2 \Leftrightarrow 2-\alpha+2+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=\alpha-2$ (1)

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ ισούται με 15, ισχύει ότι $P(2)=15 \Leftrightarrow 16-4\alpha+4+\beta=15 \Leftrightarrow \beta=4\alpha-5$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $4\alpha-5=\alpha-2 \Leftrightarrow 3\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=1$ και από την (1) προκύπτει ότι $\beta=1-2=-1$. Άρα $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

β) i. Είναι

$P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2(2x-1)+(2x-1)=(2x-1)(x^2+1)$, άρα το πολυώνυμο $\pi(x)=x^2+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. $P(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow \left(2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\right)$ ή

$\left(x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ αδύνατη}\right)$.

γ) $\sigma\upsilon\nu^3 x+\sigma\upsilon\nu x=1-\dfrac{1}{2}\eta\mu^2 x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3 x+2\sigma\upsilon\nu x=2-\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^3 x+2\sigma\upsilon\nu x=2-1+\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^3 x-\sigma\upsilon\nu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Leftrightarrow P(\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

20647. α) Επειδή το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου, ισχύει ότι
$P(2)=0 \Leftrightarrow 8\alpha+4\beta-2\beta+3=0 \Leftrightarrow 8\alpha+2\beta=-3$ (1)

Είναι $2\beta=-3-8\alpha \Leftrightarrow \beta=-\frac{3}{2}-4\alpha$.

Αν ο α είναι ακέραιος τότε ο αριθμός -4α είναι ακέραιος, οπότε ο $\beta=-\frac{3}{2}-4\alpha$ δεν είναι ακέραιος.

Αν ο β είναι ακέραιος τότε $8\alpha+2\beta=-3 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{4}\beta-\frac{3}{8}$ και ο ά δεν είναι ακέραιος.

Άρα τουλάχιστον ένας συντελεστής του πολυωνύμου δεν είναι ακέραιος.

β) Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta-\beta+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-3$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε $-24+2\beta=-3 \Leftrightarrow 2\beta=21 \Leftrightarrow \beta=\frac{21}{2}$.

γ) Για α = -3 και $\beta=\frac{21}{2}$ είναι

$P(x)=-3x^3+\frac{21}{2}x^2-\frac{21}{2}x+3$.

- 3	$\frac{21}{2}$	$-\frac{21}{2}$	3	ρ= 1
	- 3	$\frac{15}{2}$	- 3	
- 3	$\frac{15}{2}$	- 3	0	

$P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-3x^2+\frac{15}{2}x-3\right)\le 0$ (2).

Το τριώνυμο $-3x^2+\frac{15}{2}x-3$ έχει $\Delta=\frac{225}{4}-36=\frac{81}{4}$ και ρίζες

$x_1=\frac{-\frac{15}{2}+\frac{9}{2}}{-6}=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-\frac{15}{2}-\frac{9}{2}}{-6}=2$, οπότε

$-3x^2+\frac{15}{2}x-3=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ και η (2) γίνεται

x	$-\infty$		1/2		1		2		$+\infty$
$x-1$		–		–	0	+		+	
$x-\frac{1}{2}$		–	0	+		+		+	
$x-2$		–		–		–	0	+	
Γινόμενο		–	0	+	0	–	0	+	

$-3(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\cup[2,+\infty)$

δ) $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(-3x^2+\frac{15}{2}x-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $-3x^2+\frac{15}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=\frac{1}{2}$

$P(\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z})$ ή $(\sigma\upsilon\nu x=2$ αδύνατη$)$ ή

$\left(\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

20731. α) $P(1)=1^4+6\cdot 1^2-7=1+6-7=0$, άρα το x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

β) Θέτουμε $x^2=\omega$, οπότε το x^4+6x^2-7 γίνεται $\omega^2+6\omega-7$.
Το τελευταίο είναι τριώνυμο με διακρίνουσα Δ=64 και ρίζες ω = 1 ή ω = -7, άρα $\omega^2+6\omega-7=(\omega-1)(\omega+7)\Leftrightarrow x^4+6x^2-7=(x^2-1)(x^2+7)$
x^4+6x^2-7, οπότε $P(x)=(x^2-1)(x^2+7)$.

γ) i. $P(x)=0\Leftrightarrow(x^2-1)(x^2+7)=0\Leftrightarrow\left(x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\right)$ ή
$\left(x^2+7=0\Leftrightarrow x^2=-7 \text{ αδύνατη}\right)$

ii. $(2\eta\mu x-1)^4+6(2\eta\mu x-1)^2-7=0\Leftrightarrow P(2\eta\mu x-1)=0\Leftrightarrow$
$\left(2\eta\mu x-1=1\Leftrightarrow 2\eta\mu x=2\Leftrightarrow \eta\mu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή
$\left(2\eta\mu x-1=-1\Leftrightarrow 2\eta\mu x=0\Leftrightarrow \eta\mu x=0\Leftrightarrow x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$

20752.α) Κάθε σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου έχει συντεταγμένες (x, y) όπου x = συνω και y= ημω
Αν το Μ είχε συντεταγμένες (1,1) τότε $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1\Leftrightarrow 1^2+1^2=1$ που είναι άτοπο. Άρα ο Φίλιππος έχει σίγουρα άδικο.
β) i. Αν $M(0,8\,,0,6)$, τότε με βάση το α σκέλος είναι $\eta\mu\omega=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=0,8$.

ii. Είναι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{0,6}{0,8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=\frac{4}{3}$. Είναι

$A=\eta\mu(\pi-\omega)-2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega)+\varepsilon\varphi(-\omega)+\sigma\varphi(\pi+\omega)\Leftrightarrow$
$A=\eta\mu\omega-2\eta\mu\omega-\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\omega=-\eta\mu\omega-\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\omega\Leftrightarrow$
$A=-0,6-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=-\frac{3}{5}-\frac{9}{12}+\frac{16}{12}=-\frac{3}{5}+\frac{7}{12}=-\frac{36}{60}+\frac{35}{60}=-\frac{1}{60}$

γ)

4	- 6	5	- 3	ρ= 1
	4	- 2	3	
4	- 2	3	0	

$f(x)=5\sigma\upsilon\nu\omega\cdot x^3-10\eta\mu\omega\cdot x^2+5x-3=4x^3-6x^2+5x-3\Leftrightarrow$
$f(x)=(x-1)(4x^2-2x+3)$
Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x
όταν $f(x)<0\Leftrightarrow(x-1)(4x^2-2x+3)<0$ (1)
Το τριώνυμο $4x^2-2x+3$ έχει Δ< 0, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $4x^2-2x+3>0$ και η (1) γίνεται
$x-1<0\Leftrightarrow x<1$, άρα $x\in(-\infty,1)$.

20759.α) Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (1, εφω), οπότε
$(OAM)=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(OA)(AM)=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot1\cdot\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{6}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{3}$

β) $\sigma\varphi\omega=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=\dfrac{3}{4}$,

$$\eta\mu^2\omega=\frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{25}{9}}=\frac{16}{25}\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\pm\frac{4}{5}.$$

Επειδή $0<\omega<\dfrac{\pi}{2}$, είναι $\eta\mu\omega=\dfrac{4}{5}$.

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}=\frac{1}{1+\frac{16}{9}}=\frac{1}{\frac{25}{9}}=\frac{9}{25}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{3}{5}\ \text{και}$$

επειδή $0<\omega<\dfrac{\pi}{2}$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{3}{5}$.

γ) $f(x)=\eta\mu^2x-5\dfrac{4}{5}\cdot\eta\mu x+5\cdot\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow$

$f(x)=\eta\mu^2x-4\eta\mu x+3=\eta\mu^2x-\eta\mu x-3\eta\mu x+3\Leftrightarrow$

$f(x)=\eta\mu x(\eta\mu x-1)-3(\eta\mu x-1)=(\eta\mu x-1)(\eta\mu x-3)$

$f(x)=0\Leftrightarrow(\eta\mu x-1)(\eta\mu x-3)=0\Leftrightarrow\left(\eta\mu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right)$ ή

$(\eta\mu x=3\ \text{αδύνατη})$.

20943.α)

$A=\eta\mu^2(\pi-x)+\eta\mu^2(\pi+x)+\sigma\upsilon\nu^2(-x)=\eta\mu^2x+(-\eta\mu x)^2+\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$

$A=\eta\mu^2x+\cancel{\eta\mu^2x}+1-\cancel{\eta\mu^2x}=\eta\mu^2x+1$

β) $B=\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\dfrac{\eta\mu^2x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}+\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}\Leftrightarrow$

$B=\dfrac{\eta\mu^2x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}\Leftrightarrow$

$B=\dfrac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}=\dfrac{2\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu x)}}{\eta\mu x\cancel{(1+\sigma\upsilon\nu x)}}=\dfrac{2}{\eta\mu x}$.

γ) $A=B\Leftrightarrow\eta\mu^2x+1=\dfrac{2}{\eta\mu x}\Leftrightarrow\eta\mu^3x+\eta\mu x=2\Leftrightarrow\eta\mu^3x+\eta\mu x-2=0$ (1)

Θέτουμε ημx= ω
και η (1)
γίνεται $\omega^3+\omega-2=0\Leftrightarrow$

1	0	1	- 2	ρ= 1
	1	1	2	
1	1	2	0	

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+2)=0\Leftrightarrow(\omega-1=0\Leftrightarrow\omega=1)$ ή

$(\omega^2+\omega+2=0\ \text{αδύνατη αφού έχει}\ \Delta<0)$.

Άρα $\eta\mu x=1\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

21240. α) Παρατηρούμε ότι

$P(1)=3+4-5-2=0$

3	4	- 5	- 2	ρ= 1
	3	7	2	
3	7	2	0	

Με βάση το σχήμα Horner είναι

$P(x)=(x-1)(3x^2+7x+2)$.

Το τριώνυμο $3x^2+7x+2$ έχει διακρίνουσα Δ=25

και ρίζες $x=-2$ ή $x=-\dfrac{1}{3}$, άρα $3x^2+7x+2=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x+2)$, οπότε

$P(x)=3(x-1)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x+2)$ και

$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $\left(x+\dfrac{1}{3}=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}\right)$ ή

$(x+2=0 \Leftrightarrow x=-2)$

β) Με βάση τον παρακάτω πίνακα προσήμων είναι

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+7x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Γινόμενο	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$P(x)>0 \Leftrightarrow\ x\in\left(-2,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

γ) Αν θέσουμε $\dfrac{5}{x^2+1}=\omega>0$, έχουμε:

$3\left(\dfrac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\dfrac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\dfrac{5}{x^2+1}\right)-2>0 \Leftrightarrow$

$3\omega^3+4\omega^2-5\omega-2>0 \Leftrightarrow P(\omega)>0 \Leftrightarrow\ \omega\in\left(-2,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

Όμως ω > 0 άρα

$\omega>1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{x^2+1}>1 \Leftrightarrow 5>x^2+1 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Εκθετική συνάρτηση

Θέμα 2ο

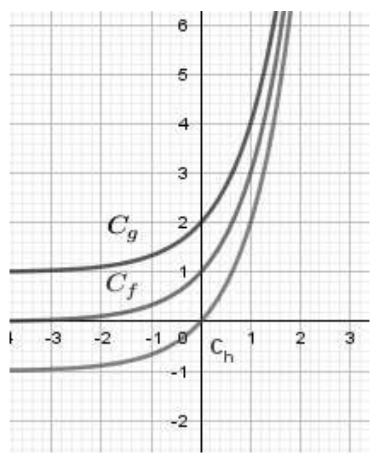
15393.α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της g(x) προέκυψε από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f(x) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Επίσης, η γραφική παράσταση της h(x) προέκυψε από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f(x) κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

β) Με βάση τα παραπάνω, έχουμε: $g(x)=f(x-2)=2^{x-2}$,

$h(x)=f(x)+1=2^x+1$.

γ) Είναι $f(x)=16 \Leftrightarrow 2^x=2^4 \Leftrightarrow x=4$, άρα A(4,16).

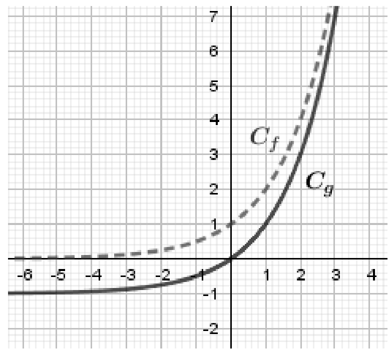
21451.α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3^x+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτηση h
προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων.



β) Η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη την ευθεία y = 0 (τον αρνητικό ημιάξονα των x). Η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Άρα η γραφική παράσταση της g έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση y = 1. Ομοίως, η κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω θα μετατοπίσει και την ασύμπτωτη ευθεία κατά μία μονάδα προς τα κάτω. Άρα η γραφική παράσταση της h έχει ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση y = −1.

18866. α) $2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

β) i. Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης gπροκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης κατά μονάδα προς τα κάτω.



ii. Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, επομένως η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.

21163.α) Εφόσον το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι:

$f(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι εκθετική με βάση $0 < \frac{1}{2} < 1$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα.

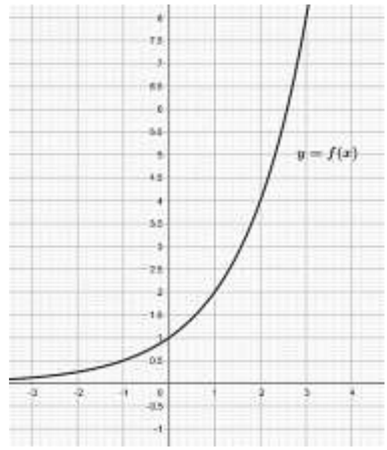
Επειδή $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, είναι $f\left(\sqrt{2}\right) > f\left(\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \alpha^{\sqrt{2}} > \alpha^{\sqrt{3}}$.

20855.α) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$

β) $f(x) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 3$. Σημείο τομής της C_f με την ε το $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία ε όταν $f(x) < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow x > 3$

21091.α) i. Με βάση την γραφική παράσταση της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:



x	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ii. Επειδή η f είναι εκθετική, θα είναι της μορφής $f(x)=\alpha^x,\ x\in\mathbb{R},\ 0<\alpha\neq 1$.
Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (1,2), ισχύει ότι $f(1)=2\Leftrightarrow \alpha^1=2\Leftrightarrow \alpha=2$,
άρα $f(x)=2^x,\ x\in\mathbb{R}$.
β) $f(x)=32\Leftrightarrow 2^x=2^5\Leftrightarrow x=5$.

21993.α) Για την f για x = 1 είναι $f(1)=2^1=2$, δηλαδή το σημείο (1,2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.
Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι το σημείο (1,2) ανήκει στη C_2, άρα η γραφική παράσταση της f είναι η C_2 και της g είναι η C_1.
β) Για την φ για x = 1 είναι $\varphi(1)=4^1=4$, δηλαδή το σημείο (1,4) ανήκει στη γραφική παράσταση της φ.
Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι το σημείο (1,4) ανήκει στη C_4, άρα η γραφική παράσταση της φ είναι η
C_4 και της ψ είναι η C_3.

21994.α) 6 γραμμάρια γιατί το σημείο (0,6) ανήκει στη καμπύλη της εκθετικής απόσβεσης.
β) Η ημιζωή του ραδιενεργού υλικού είναι η τιμή του χρόνου t κατά την οποία η ποσότητα του υλικού μειώνεται στο ήμισυ της αρχικής, δηλαδή γίνεται 3 γραμμάρια.
Επειδή το σημείο (2,3) ανήκει στη καμπύλη, για t = 2 η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι 3 γραμμάρια.
γ) Το υψόμετρο της καμπύλης γίνεται μικρότερο του 1 στο χρονικό διάστημα (5, 6), δηλαδή κατά τη διάρκεια της 6ης ημέρας. Άρα, κατά τη

διάρκεια της 6ης ημέρας θα έχει απομείνει ποσότητα ραδιενεργού υλικού μικρότερη από 1gr.

Θέμα 4ο

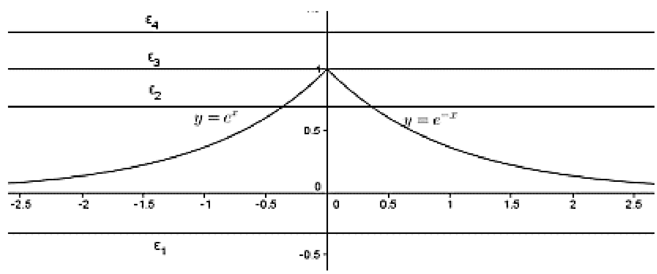
15269.α) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την $y = e^x$ για x <0 και την $y = e^{-x}$ για $x \geq 0$, οπότε

$$f(x) = \begin{cases} e^x , & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 για x = 0.

γ) Αν $\alpha \leq 0$ (ευθεία ε_1) τότε η C_f δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία y = α..



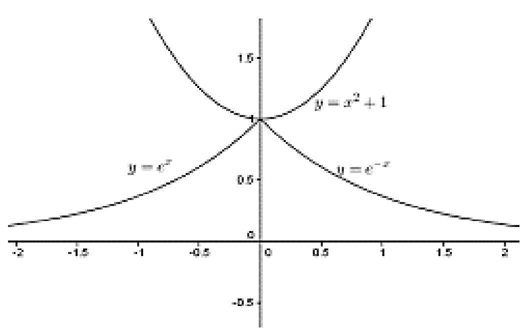
Αν 0 < α < 1 (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία y = α έχουν 2 κοινά σημεία.

Αν α = 1 (ευθεία ε_3) έχουν ένα κοινό σημείο το (0,1).

Τέλος αν α > 1 (ευθεία ε_4) δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

δ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1$ η παραβολή έχει ελάχιστο το 1 για x = 0.

Επειδή η f έχει μέγιστο το 1 για x = 0 το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την παραβολή είναι το (0,1)



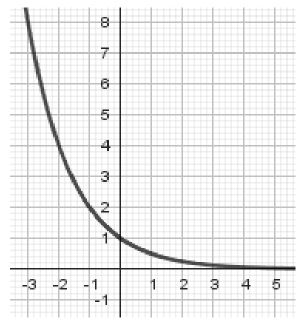
18693.α) Η f είναι εκθετική συνάρτηση όταν

$$\begin{cases}\dfrac{2-\lambda}{4}>0\\[2mm] \dfrac{2-\lambda}{4}\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-\lambda>0\\ 2-\lambda\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<2\\ \lambda\neq -2\end{cases}\Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-2)\cup(-2,2).$$

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν

$$0<\frac{2-\lambda}{4}<1\Leftrightarrow 0<2-\lambda<4\Leftrightarrow -2<-\lambda<2\Leftrightarrow -2<\lambda<2.$$

γ) Για λ= 0 είναι $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.



i. σχήμα

ii. $f(x)+f(x+1)=6\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}=6\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=6\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x=12\Leftrightarrow$$

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^x=12\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x=4\Leftrightarrow 2^{-x}=2^2\Leftrightarrow$$

$$-x=2\Leftrightarrow x=-2.$$

20642.α) Επειδή η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο A(–1, 2) ισχύει ότι $f(-1)=2$.

Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι

$f(-1)=-f(1)\Leftrightarrow 2=-f(1)\Leftrightarrow f(1)=-2$.

Είναι $-1<1$ και $f(-1)>f(1)$, επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι περιττή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=-f(x)$. Αν στη τελευταία σχέση αντικαταστήσουμε x = 0, προκύπτει $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$ άρα η C_f διέρχεται από το σημείο O(0, 0).

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, για κάθε x < 0 είναι

$f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για κάθε x > 0 είναι

$f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$.

Για κάθε x < 0 είναι $e^x<e^0\Leftrightarrow e^x-1<0\Leftrightarrow g(x)<0$ και επειδή $f(x)>0$, είναι $f(x)>g(x)$ για κάθε x < 0. Για κάθε x > 0 είναι $e^x>e^0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow g(x)>0$ και επειδή $f(x)<0$, είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε x > 0. Είναι $f(0)=g(0)=0$ και $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\neq 0$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το Ο.

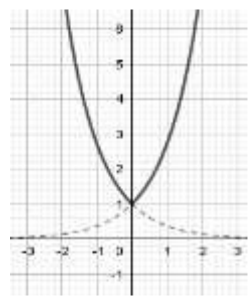
δ) Είναι $h(x)=f(x+2)+1=-2(x+2)^3+1$, $x\in\mathbb{R}$.

20854.α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=e^{|-x|}=e^{|x|}=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|x|\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0, άρα

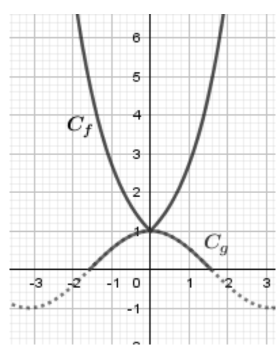
$e^{|x|}\geq e^0\Leftrightarrow f(x)\geq 1=f(0)$,

άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για x = 0.



γ) Είναι $f(x)=e^{|x|}=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\ e^{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της $y=e^{-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ για x < 0 και από τα σημεία της $y=e^x$ για $x\geq 0$



δ) Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $0\leq \text{συν}x\leq 1$, άρα $g(x)\leq 1$ και επειδή $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ αληθεύει μόνο όταν $f(x)=1=g(x)\Leftrightarrow x=0$.

21471.α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(2,13), οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha-2\alpha+\beta-\beta=13-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 2\alpha=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10+\beta=3 \\ \alpha=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-7 \\ \alpha=5 \end{cases}.$$

β) Για α = 5 και β = –7 είναι $f(x)=5\cdot 2^x-7$ και για x = 0 είναι $f(0)=5-7=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0, - 2) .

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$2^{x_1}<2^{x_2}\Leftrightarrow 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2}\Leftrightarrow 5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7\Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) $f(x)>4^x-3\Leftrightarrow 5\cdot 2^x-7>4^x-3\Leftrightarrow 0>\left(2^x\right)^2-5\cdot 2^x+4$

Θέτουμε $2^x=y>0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2-5y+4<0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ=9 και ρίζες $y=1$ ή $y=4$, άρα

$y^2-5y+4<0\Leftrightarrow 1<y<4\Leftrightarrow 1<2^x<4\Leftrightarrow 2^0<2^x<2^2\Leftrightarrow 0<x<2$.

21448.α) Στο πλαίσιο του προβλήματος η σταθερά q_0 παριστάνει τη δόση του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής (την ποσότητα του φαρμάκου στον οργανισμό τη χρονική στιγμή t = 0).

Η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό του ασθενούς μειώνεται όσο περνούν οι ημέρες, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση $f(t)=q_0\cdot\alpha^t$, $t\geq 0$ είναι φθίνουσα, το οποίο συμβαίνει όταν $0<\alpha<1$.

β) i. Μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί, δηλαδή

$f(1)=\frac{1}{2}q_0\Leftrightarrow q_0\cdot\alpha=\frac{1}{2}q_0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$.

ii. $f(2) = q_0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{q_0}{4}$, $f(2) = q_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{q_0}{8}$, $f(4) = q_0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{q_0}{16}$,

$f(5) = q_0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{q_0}{32}$

και

$f(6) = q_0\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{q_0}{64}$.

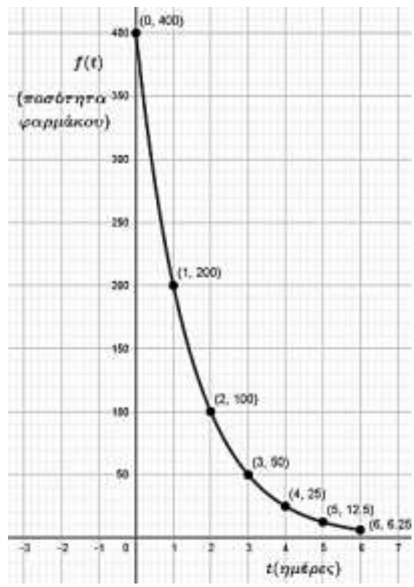
t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$

γ) i. Έχουμε

$f(4) = 25 \Leftrightarrow \frac{q_0}{16} = 25 \Leftrightarrow$

$q_0 = 400\text{mg}$.

ii. Με τη βοήθεια του βii) ερωτήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τη συνάρτηση $f(t) = 400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$ στο διάστημα $[0,6]$:



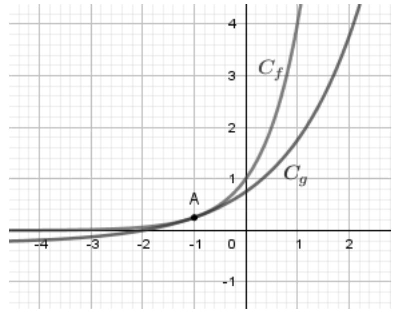
21444.α) Οι λύσεις τις εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . Έχουμε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\left(2^x\right)^2 - 4\cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2\cdot 2^x - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot 2^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

Είναι $f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

β) Είναι $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$



$4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$4\left(2^x\right)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\left(2 \cdot 2^x - 1\right)^2 > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$2^x \neq \frac{1}{2} = 2^{-1} \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο Α.

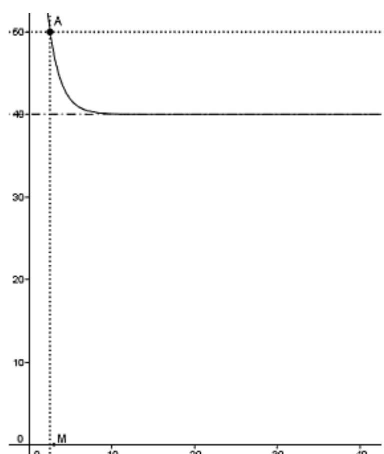
γ)

x	-2	-1	0	1
$f(x) = 4^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4

x	-2	-1	0	1
$g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$

21677.α) Είναι $P(0) = Q + (100 - Q) = 100$ άρα ο εξεταζόμενος τη χρονική στιγμή t =0 θυμάται το 100% της γνώσης.

β) Στον εξεταζόμενο μένει το 50% της γνώσης, τη χρονική στιγμή t κατά την οποία



$P(t) = 50 \Leftrightarrow$

$40 + (100 - 40)e^{-0,7t} = 50 \Leftrightarrow$

$60e^{-0,7t} = 10 \Leftrightarrow e^{-0,7t} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow$

$-0,7t = \ln\frac{1}{6} \Leftrightarrow -0,7t = -\ln 6 \Leftrightarrow$

$-0,7t = 1,79 \Leftrightarrow t = 2,56$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο Α αντιστοιχεί στο 50% της γνώσης. Η τετμημένη του Α είναι t=2,56 και η συνάρτηση P είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε επειδή $3>2,56$, είναι $P(3)<P(2,56)=50$, οπότε μετά από τρείς εβδομάδες θα θυμάται κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε.
καθώς περνούν οι βδομάδες ο εξεταζόμενος θυμάται όλο και λιγότερα.
δ) Είναι $P(t)=40+60e^{-0,7t}$

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=60e^{-0,7t}$ καθώς το t μεγαλώνει απεριόριστα πλησιάζει απεριόριστα τον άξονα x΄x (y=0). Η γραφική παράσταση της $P(t)=40+60e^{-0,7t}$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=60e^{-0,7t}$ κατά 40 προς τα πάνω, οπότε η γραφική της παράσταση θα πλησιάζει απεριόριστα την ευθεία y=40 από επάνω.

20689.α)

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
Γινόμενο	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{x-2}{x+1}>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$.

β) i. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι καλώς ορισμένη όταν
$\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0 \Leftrightarrow \alpha<-1$ ή $\alpha>2$.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα όταν

$$0<\frac{\alpha-2}{\alpha+1}<1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\alpha-2}{\alpha+1}>0\\ \frac{\alpha-2}{\alpha+1}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha<-1 \text{ ή } >2\\ \frac{\alpha-2}{\alpha+1}-1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha<-1 \text{ ή } >2\\ \frac{\alpha-2-\alpha-1}{\alpha+1}<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha<-1 \text{ ή } \alpha>2\\ \frac{-3}{\alpha+1}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha<-1 \text{ ή } \alpha>2\\ \alpha+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha<-1 \text{ ή } \alpha>2\\ \alpha>-1\end{cases} \Rightarrow \alpha>2.$$

iii. Η f είναι σταθερή όταν $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}=1 \Leftrightarrow \alpha-2=\alpha+1 \Leftrightarrow -2=1$ αδύνατο.
Άρα δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

21854.α) i.

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα Q(t) του υγρού σε λίτρα.	8	4	2	1

ii. $Q_0=Q(0)=8$

iii. Η μισή ποσότητα του υγρού είναι 4 λίτρα και Q(2)= 4, άρα σε δύο ημέρες θα εξατμιστεί η μισή ποσότητα.

β) $Q(2)=4 \Leftrightarrow 8\cdot 2^{-\frac{2}{c}}=4 \Leftrightarrow 2^{-\frac{2}{c}}=\frac{4}{8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{2}{c}}=\frac{1}{2}=2^{-1} \Leftrightarrow -\frac{2}{c}=-1 \Leftrightarrow c=2$

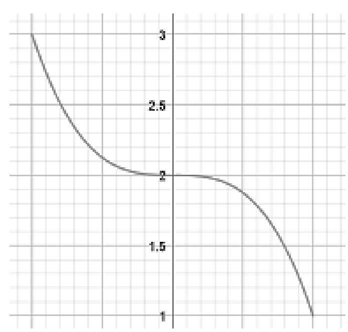
γ) Την t αν περάσουν 2 ημέρες θα είναι η t+2 ημέρα, τότε

$$Q(t+2)=8\cdot 2^{-\frac{t+2}{2}}=8\cdot 2^{-\frac{t}{2}-1}=8\cdot 2^{-\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}=4\cdot 2^{-\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}Q(t).$$

Άρα, μετά από δύο ημέρες, η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται στο μισό, οπότε το άλλο μισό έχει εξατμιστεί.

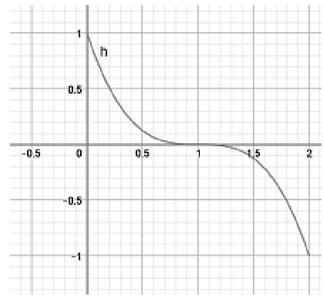
Θέμα 3ο

15023.α) Στο σχήμα α η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y οπότε είναι άρτια και όχι περιττή, οπότε δεν είναι. Στο σχήμα γ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα οπότε δεν είναι. Στο σχήμα δ η συνάρτηση είναι περιττή και γνησίως φθίνουσα, αλλά έχει πεδίο ορισμού το [–2,2] και όχι το [–1,1] , οπότε δεν είναι. Συνεπώς σωστή απάντηση είναι το σχήμα β.

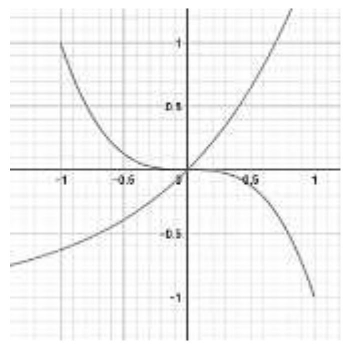


β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω και φαίνεται στο διπλανό σχήμα

γ) Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



δ) Η γραφική παράσταση της s προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.
Σχεδιάζοντάς την στο ίδιο σχήμα με την f βλέπουμε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το (0,0), άρα $s(x) = f(x) \Leftrightarrow x = 0$.



Λογάριθμοι

Λογάριθμοι
Θέμα 2ο

15687.α) $A=\log_4 3+\log_4\alpha-\log_4\beta = A=\log_4(3\alpha)-\log_4\beta=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}$.

β) $A=\log_4\frac{3\alpha}{\beta}=\log_4\frac{16\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}=\log_4 4^2=2$.

15816.α) $2\beta=\alpha+\gamma\Leftrightarrow 2\ln 4=\ln 2+\ln 8\Leftrightarrow \ln 4^2=\ln(2\cdot 8)\Leftrightarrow \ln 16=\ln 16$ ισχύει.

β) $\beta+\gamma=\ln 4+\ln 8=\ln(4\cdot 8)=\ln 32=\ln 2^5=5\ln 2=5\alpha$.

15817.α) Είναι $2<3$ και η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f(2)<f(3)\Leftrightarrow \ln 2<\ln 3\Leftrightarrow \alpha<\beta$

β) $\beta-\alpha<1\Leftrightarrow \ln 3-\ln 2<1\Leftrightarrow \ln\frac{3}{2}<\ln e\Leftrightarrow \frac{3}{2}<e$ ισχύει

19903.α) $\alpha=\log 100+\log 5+\log 2-\log 1=2+\log(5\cdot 2)-0\Leftrightarrow$
$\alpha=2+\log 10=2+1=3$.

β) $9\cdot 2^x=4\cdot 3^x\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2\Leftrightarrow x=2$.

20663. α) $\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=\log_2 8+\log_2\left(\sqrt{2}\right)^2-0=$
$\log_2(8\cdot 2)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$.

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$, είναι
$\upsilon=P(2)=P(x)=8\log_2 8+16\log_2\sqrt{2}+1990=8\left(\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}\right)+1990\Leftrightarrow$

$\upsilon=8\cdot 4+1990=32+1990=2022$.

20710.α) $\beta+\alpha=\log 50+\log 20=\log(50\cdot 20)=\log 1000=\log 10^3=3$.

β) $\beta+\alpha=3 \Leftrightarrow \ln(\beta+\alpha)>\ln 3$ και $3>e$ άρα $\ln 3>\ln e=1$, άρα $\ln(\beta+\alpha)>1$.

γ) $10^{\beta}-10^{\alpha}=10^{\log 50}-10^{\log 20}=50-20=30=10\cdot 3=10(\beta+\alpha)$.

20711.α) Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, έχουμε: $3<4 \Leftrightarrow \log 3<\log 4 \Leftrightarrow \alpha<\beta$

β) i. $\beta+\alpha=\log 3+\log 4=\log 12>\log 10=1$.

ii. Είναι $\log 3<\log 4 \overset{\log 4>\log 1=0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\log 3}{\log 4}<1 \Leftrightarrow \log\dfrac{\alpha}{\beta}<\log 1=0$

21676.α) $A=\ln\dfrac{e}{5}-\ln\dfrac{4}{e}=\ln e-\ln 5-\ln 4+\ln e \Leftrightarrow$

$A=1-1{,}609-1{,}386+1=2-2{,}995=-0{,}995$.

β) $\ln 80=\ln\left(5\cdot 4^2\right)=\ln 5+\ln 4^2=\ln 5+2\ln 4=1{,}609+2\cdot 1{,}386=4{,}381$.

21858.α) $A=2\log 5+2\log 2=2(\log 5+\log 2)=2\log 10=2\cdot 1=2$.

β) $e^{\lambda}=A \Leftrightarrow e^{\lambda}=2 \Leftrightarrow \lambda=\ln 2$.

γ) Είναι $2<e \Leftrightarrow \ln 2<\ln e \Leftrightarrow \ln 2<1 \Leftrightarrow \lambda<1 \Leftrightarrow \ln\lambda<\ln 1 \Leftrightarrow \ln\lambda<0$.

Θέμα 4ο

15251.α) Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0 \Leftrightarrow \alpha=15$

2	-9	13	- 6	ρ=1
	2	-7	6	
2	-7	6	0	

β) i. Είναι

$P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$ και

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Κάνοντας τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-1$προκύπτει ότι

$P(x)=(x-1)\left(2x^2-7x+6\right)$.

Το τριώνυμο $2x^2-7x+6$ έχει Δ=1 και ρίζες $x=2,\ x=\frac{3}{2}$, οπότε

$2x^2-7x+6=2(x-2)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(x-2)(2x-3)$, άρα

$P(x)=(x-1)(x-2)(2x-3)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$.

ii.

x	$-\infty$		1		$3/2$		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−		−	0	+	
$2x-3$		−		−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

$P(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$

iii. Είναι $\ln 2<\ln e=1$ και $P(x)<0$ για x < 1,άρα $P(\ln 2)<0$.

15474.α) $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2=ex^3+4x^2\ln e^{\frac{1}{2}}+2 \Leftrightarrow$

$P(x)=ex^3+4x^2\cdot\frac{1}{2}+2=ex^3+2x^2+2$.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$

με την ευθεία ε: $y=ex+4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$P(x)=ex+4 \Leftrightarrow ex^3+2x^2+2=ex+4 \Leftrightarrow ex^3-ex+2x^2-2=0 \Leftrightarrow$

$ex\left(x^2-1\right)+2\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)(ex+2)=0 \Leftrightarrow$

$\left(x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1\right)$ ή

x	$-\infty$		-e/2		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+		+	0	−	0	+	
$ex+2$		−	0	+		+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

$\left(ex+2=0 \Leftrightarrow ex=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{e}\right)$.

γ) Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι πάνω από την ευθεία ε: y = ex + 4 θα λύσουμε την ανίσωση:

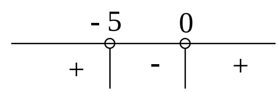
$$P(x) > ex + 4 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(ex + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, -\frac{2}{e}\right) \cup (1, +\infty)$$

δ) Παρατηρούμε ότι το $P(e) - e^2 - 4$ είναι η τιμή του $P(x) - (ex + 4)$ για x = e, οπότε με βάση το προηγούμενο σκέλος είναι $P(e) - e^2 - 4 > 0$ αφού e > 1.

15591.α) Η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς όταν $\frac{\alpha}{\alpha+5} > 0$ και $\frac{\alpha}{\alpha+5} \neq 1$.

Είναι $\frac{\alpha}{\alpha+5} \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha + 5$ ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και

$\frac{\alpha}{\alpha+5} > 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha+5) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -5$ ή $\alpha > 0$.



β) Η f είναι γνησίως αύξουσα όταν

$$\frac{\alpha}{\alpha+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+5} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - \alpha - 5}{\alpha+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{-5}{\alpha+5} > 0 \Leftrightarrow \alpha + 5 < 0 \Leftrightarrow \alpha < -5$$

γ) Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του α για την οποία η f είναι γνησίως αύξουσα είναι η – 6. Τότε

$$f(x) = \left(\frac{-6}{-6+5}\right)^x = 6^x.$$

$$f(x) + f(x+1) = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6^{x+1} = 14 \Leftrightarrow 6^x + 6 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow 7 \cdot 6^x = 14 \Leftrightarrow$$
$$6^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_6 2.$$

15822α) Είναι $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x = x(\alpha x^2 + \beta x + 1)$, οπότε μία ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι η x = 0 και οι άλλες δύο θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + 1$ που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1. Άρα οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι το 0, το 1 και το – 1.

β) Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0 \Leftrightarrow \beta=-1-\alpha \; (1)$.

$P(-1)=0 \Leftrightarrow -\alpha+\beta-1=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha-1-\alpha-1=0 \Leftrightarrow -2\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=-1$ και από τη σχέση (1) προκύπτει β =0.

γ) i. Είναι

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$P(x)>0 \Leftrightarrow -x^3+x>0 \Leftrightarrow$

$x\left(1-x^2\right)>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)\cup(0,1)$.

ii. $\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

Επειδή $\dfrac{1}{2}\in(0,1)$ είναι $P\left(\log\sqrt{10}\right)=P\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$.

15823α) Είναι $P(x)=\left(4x^2-1\right)(3x-2)+1$

$P(x)=1 \Leftrightarrow \left(4x^2-1\right)(3x-2)+1=1 \Leftrightarrow \left(4x^2-1\right)(3x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\left(4x^2-1=0 \Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\right)$ ή

$\left(3x-2=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}\right)$

β) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $P(x)=1$ έχει λύσεις τις

$x=\dfrac{1}{2}$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$ ή $x=\dfrac{2}{3}$.

Είναι $\log 5\neq\dfrac{1}{2}$ αφού $5\neq 10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$, $\log 5\neq-\dfrac{1}{2}$ αφού $5\neq 10^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

και $\log 5\neq\dfrac{2}{3}$ αφού $5\neq 10^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{10^2}=\sqrt[3]{100}$, άρα $P(\log 5)\neq 1$.

γ) Είναι $P(-1)=\left(4(-1)^2-1\right)\left(3(-1)-2\right)+1=3\cdot(-5)+1=-14<0$ και

$P(0)=\left(4\cdot 0^2-1\right)(3\cdot 0-2)+12+1=3>0$.

Αφού οι τιμές $P(-1)$ και $P(0)$ είναι ετερόσημες, η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

18110.α) i. $x\left(e^x-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $\left(e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0\right)$,

ii. Αν x > 0, τότε $e^x>1 \Leftrightarrow e^x-1>0$, οπότε $x\left(e^x-1\right)>0$.

Αν x < 0, τότε $e^x<1 \Leftrightarrow e^x-1<0$, οπότε $x\left(e^x-1\right)>0$.

β) i. Η f ορίζεται όταν $x\left(e^x-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$, άρα $A_f=\mathbb{R}$.

ii. $f(0)=\sqrt{0}=0$, $f(\ln 2)=\sqrt{\ln 2\left(e^{\ln 2}-1\right)}=\sqrt{\ln 2(2-1)}=\sqrt{\ln 2}$ και

$$f(-\ln 2)=\sqrt{-\ln 2\left(e^{-\ln 2}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2\left(e^{\ln 2^{-1}}-1\right)}==\sqrt{-\ln 2\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\ln 2}$$

iii. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε επειδή $-\ln 2<0$ θα είναι $f(-\ln 2)<f(0)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}\ln 2}<0$ άτοπο.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε επειδή $-\ln 2<\ln 2$ θα είναι $f(-\ln 2)>f(\ln 2)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}\ln 2}>\sqrt{\ln 2}$ άτοπο. Επομένως η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

18235.α) Για κάθε x < 0 $e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x-1<0$, άρα $f(x)=-e^x+1$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $e^x\geq e^0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0$, άρα $f(x)=e^x-1$. Επομένως

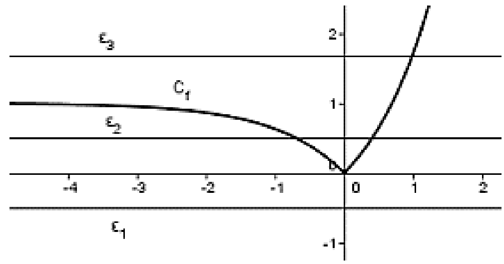
$$f(x)=\begin{cases}-e^x+1, & x<0\\ e^x-1, & x\geq 0\end{cases}.$$

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και έχει ελάχιστο το 0 για x = 0.

γ) Αν x < 0 είναι

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -e^x+1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2 \text{ δεκτή.}$$

Αν $x\geq 0$ είναι $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x-1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{3}{2}$ δεκτή.



δ) Αν $\alpha < 0$, (ευθεία ε_1) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.

• Αν $\alpha = 0$, τότε η C_f και η ευθεία $y = 0$ (άξονας xx') έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

• Αν $0 < \alpha < 1$, (ευθεία ε_2) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.

• Αν $\alpha \geq 1$, (ευθεία ε_3) τότε η C_f και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ένα κοινό σημείο.

18429.α) $D = 10\cdot\log\left(\dfrac{100}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(10^2\cdot 10^{12}\right) = 10\log\left(10^{14}\right) \Leftrightarrow$

$D = 10\cdot 14 = 140\text{Db}$.

β) $D_2 - D_1 = 20 \Leftrightarrow 10\cdot\log\left(\dfrac{I_2}{10^{-12}}\right) - 10\cdot\log\left(\dfrac{I_1}{10^{-12}}\right) = 20 \Leftrightarrow$

$$\log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) - \log\left(\frac{I_1}{10^{-12}}\right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{\frac{I_2}{10^{-12}}}{\frac{I_1}{10^{-12}}}\right) = 2 \Leftrightarrow \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{I_2}{I_1} = 10^2 \Leftrightarrow I_2 = 100I_1 .$$

γ) $120 = 10\cdot\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) \Leftrightarrow 12 = \log\left(I\cdot 10^{12}\right) \Leftrightarrow 10^{12} = 10^{12} I \Leftrightarrow I = 1\text{w}/\text{m}^2$.

18434.α) Επειδή $I_0 > 0,\ e^{-\lambda h} > 0$ για κάθε h, είναι $I > 0$, οπότε δεν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

β) Θέλουμε $I \leq \dfrac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow I_0\cdot e^{-\lambda h} \leq \dfrac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda h} \leq \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -\lambda h \leq \ln\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$-\lambda h \leq -\ln 4 \Leftrightarrow h \geq \frac{\ln 4}{\lambda} = \frac{\ln 2^2}{1{,}4\text{m}^{-1}} = \frac{2\cdot 0{,}7}{1{,}4}\text{m} = 1\text{m}$$

Άρα σε βάθος τουλάχιστον ενός μέτρου δεν υπάρχει η συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής.

γ) Για το συγκεκριμένο μέσο έχουμε ότι για $h=10m$ είναι

$$I=\frac{1}{2}I_0 \Leftrightarrow I_0\cdot e^{-10\lambda}=\frac{1}{2}I_0 \Leftrightarrow e^{-10\lambda}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left(e^{-\lambda}\right)^{10}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{-\lambda}=\sqrt[10]{2^{-1}}=2^{-\frac{1}{10}},$$

άρα $I=I_0\cdot e^{-\lambda h}=I_0\cdot\left(e^{-\lambda}\right)^h=I_0\cdot\left(2^{-\frac{1}{10}}\right)^h=I_0\cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

18437.α) Το ύψος (OK)είναι η τεταγμένη του σημείου στο οποίο τέμνει τον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης, δηλαδή ο αριθμός:
$f(x)=-192\left(e^0+e^0\right)+576=576-384=192m$.

β) Οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) τέμνει τον άξονα x΄x, είναι λύσεις της εξίσωσης

$f(x)=0$. Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow -192\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)+576=0\Leftrightarrow$

$$-192\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)=-576\Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}=3\Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}}+\frac{1}{e^{\frac{x}{100}}}=3 \quad (1)$$

Θέτουμε $e^{\frac{x}{100}}=\omega$. Είναι $x>0\Leftrightarrow \frac{x}{100}>0\Leftrightarrow e^{\frac{x}{100}}>e^0=1\Leftrightarrow \omega>1$ και η

(1) γίνεται $\omega+\frac{1}{\omega}=3\Leftrightarrow \omega^2+1=3\omega\Leftrightarrow \omega^2-3\omega+1=0$.

Δ=5, $\omega=\frac{3+\sqrt{5}}{2}>1$ δεκτή ή $\omega=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1$ απορρίπτεται.

Άρα $e^{\frac{x}{100}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow \frac{x}{100}=\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$x=100\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cong 100\cdot 0{,}96=96m.$$

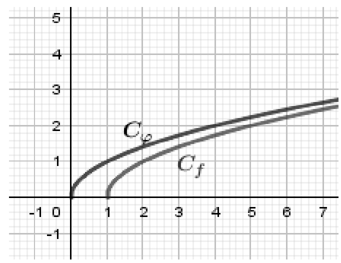
γ) Το σημείο Β έχει θα έχει τετμημένη -96, άρα θα είναι $(AB)=96\cdot 2=192\ m=(OK)$.

18863. α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$.

Για κάθε $x \geq 1$είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\frac{x+1}{3} \Leftrightarrow x-1=\frac{(x+1)^2}{9} \Leftrightarrow$

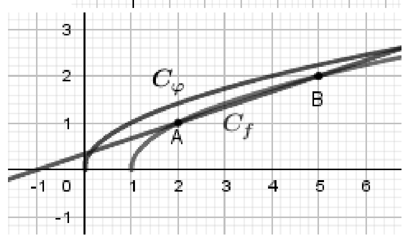
$9x-9=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=5$

Είναι $f(2)=1=g(2), f(5)=2=g(5)$, οπότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι τα (2,1) και (5,2).



β) i. Επειδή $f(x)=\varphi(x-1)$η γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ευθεία, οπότε για τον σχεδιασμό της χρειάζονται δύο σημεία της. Επιλέγουμε τα σημεία A(2,1) και B(5,2) , τα οποία είναι και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι οι ακόλουθες:



γ) Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν $x \in (2,5)$.

δ) Είναι $e^2<10<e^3 \Leftrightarrow 2<\ln 10<3$, άρα $\ln 10 \in (2,5)$, οπότε

$f(\ln 10)>g(\ln 10) \Leftrightarrow \sqrt{\ln 10-1}>\frac{1+\ln 10}{3}$.

20657.α) Η αρχική θερμοκρασία του σώματος πριν το αφήσουμε να κρυώσει είναι $\theta_0=100^\circ C$.

Επειδή 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^\circ C$, ισχύει ότι

$\theta(5)=80 \Leftrightarrow 80=30+(100-30)e^{5k} \Leftrightarrow 50=70e^{5k} \Leftrightarrow$

$e^{5k}=\frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k=\ln\frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k=-0,336 \Leftrightarrow k=-\frac{0,336}{5}=-0,0672$.

β) Από το προηγούμενο σκέλος είναι

$$e^{5k}=\frac{5}{7}\Leftrightarrow\left(e^{k}\right)^{5}=\frac{5}{7}\Leftrightarrow e^{k}=\sqrt[5]{\frac{5}{7}}=\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$$, οπότε

$$\theta\left(t\right)=T+\left(\theta_0-T\right)\left(e^{k}\right)^{t}=30+\left(100-30\right)\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{t}=30+70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}.$$

γ) Επειδή $1h40\min=100\min$, είναι

$$\theta\left(100\right)=30+70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{100}{5}}=30+70\left(\frac{5}{7}\right)^{20}=30+70\left(\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\right)^{2}\Leftrightarrow$$

$$\theta\left(100\right)\cong 30+70\left(0,034\right)^{2}=30+70\cdot 0,001156\ =30+0,08092\cong 30,08^{\circ}C$$

20669.α) i. Για κάθε $x<0$ είναι $\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x$ ισχύει γατί $\sqrt{x^2+1}>0$ και $x<0$.

ii. 1ος τρόπος: Για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)$ είναι $f\left(x\right)>0$ από το προηγούμενο σκέλος.

Αν $x\geq 0$, τότε $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x\Leftrightarrow x^2+1>x^2$ ισχύει

2ος τρόπος: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>\left|x\right|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0\Leftrightarrow f\left(x\right)>0$$

β) i. $g\left(-x\right)+g\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\Leftrightarrow$

$$g\left(-x\right)+g\left(x\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$g\left(-x\right)+g\left(x\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{2}-x^2\right]=\ln\left(x^2+1-x^2\right)=\ln 1=0.$$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}=A_g$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και

$g\left(-x\right)+g\left(x\right)=0\Leftrightarrow g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$, άρα η g είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

20845.α) $f(1)-f(0)\geq f(0)-f(-1)\Leftrightarrow$

$e^{\kappa}-1\geq 1-e^{-\kappa}\Leftrightarrow e^{\kappa}+\frac{1}{e^{\kappa}}-2\geq 0\Leftrightarrow$

$\left(e^{\kappa}\right)^2+1-2e^{\kappa}\geq 0\Leftrightarrow\left(e^{\kappa}-1\right)^2\geq 0$ ισχύει.

Η ισότητα ισχύει όταν $\left(e^{\kappa}-1\right)^2=0\Leftrightarrow e^{\kappa}-1=0\Leftrightarrow e^{\kappa}=1\Leftrightarrow \kappa=0$

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$\kappa x_1<\kappa x_2\Leftrightarrow e^{\kappa x_1}<e^{\kappa x_2}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

γ) i. $e^{2x}>2e^{x}\Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}>0\Leftrightarrow e^{x}\left(e^{x}-2\right)>0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$

$e^{x}-2>0\Leftrightarrow e^{x}>2\Leftrightarrow x>\ln 2$.

ii. Επειδή για κάθε $x>\ln 2$ είναι $e^{2x}>2e^{x}$ και στο σχήμα μετά το σημείο Α που είναι το μοναδικό κοινό σημείο των δύο καμπυλών, η C_1 είναι πάνω από τη C_2, η C_1 είναι η γραφική παράσταση της $k(x)=e^{2x}$ και η C_2 της $\varphi(x)=2e^{x}$.

Η τετμημένη του Α είναι $x=\ln 2$, τότε

$\varphi(\ln 2)=2e^{x}=2e^{\ln 2}=2\cdot 2=4=k(\ln 2)$, άρα $A(\ln 2,4)$.

20847.α) Από τον πίνακα φαίνεται ότι Δ = 10. Άρα έχουμε:

$10=10\cdot\log\left(10^{12}\cdot I\right)\Leftrightarrow\log\left(10^{12}\cdot I\right)=1\Leftrightarrow 10^{12}\cdot I=10\Leftrightarrow I=\frac{10}{10^{12}}=10^{-11}$.

Επομένως, η ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων είναι $10^{-11}\ W/m^2$.

β) Για I = 1 είναι $D=10\cdot\log\left(10^{12}\cdot 1\right)=10\log 10^{12}=10\cdot 12=120$

Επομένως, η ηχοστάθμη είναι ντεσιμπέλ, δηλαδή αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν η αρχική ένταση Ι διπλασιαστεί και γίνει 2Ι, τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D ΄ γίνεται:

$D'=10\cdot\log\left(10^{12}\cdot 2I\right)=10\left(\log 2\left(10^{12}\cdot I\right)\right)=10\left(\log 2+\log\left(10^{12}\cdot I\right)\right)\Leftrightarrow$

$D'=10\log 2+10\log\left(10^{12}\cdot I\right)\Leftrightarrow$

$D'=10\cdot 0,3+D=3+D$. Επομένως, η ένταση του ήχου θα αυξηθεί κατά 3 ντεσιμπέλ.

Λογαριθμική συνάρτηση
Θέμα 2ο

15093.α) Για να ορίζεται η f πρέπει
$10^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$\log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log(10^x - 1) > \log 1 \Leftrightarrow 10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2 \Leftrightarrow$$

$$\log 10^x > \log 2 \Leftrightarrow x > \log 2$$

γ) $\log(10^{2x} - 10^x) = \log\left[10^x(10^x - 1)\right] = \log 10^x + \log(10^x - 1) = x + f(x)$

δ) Η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f με την y = - x, είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = 0 \Leftrightarrow \log(10^{2x} - 10^x) = \log 1 \Leftrightarrow$$

$$10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^{2x} - 10^x - 1 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $10^x = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 1 = 0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 5$ και ρίζες $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\omega = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ που απορρίπτεται.

Άρα $10^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \log 10^x = \log\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow x = \log\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες $\left(\log\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), -\log\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$.

15267.α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 1 > 0$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6 \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 10 + \log 3 - \log 6 \Leftrightarrow$$

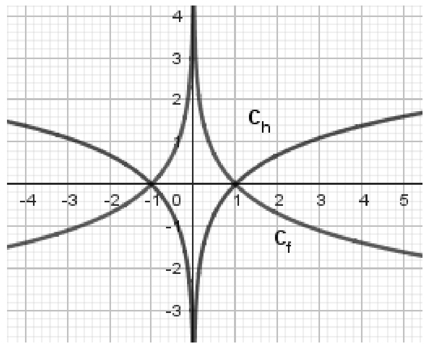
$$\log(x^2 + 1) = \log 30 - \log 6 \Leftrightarrow$$

$$\log(x^2 + 1) = \log\frac{30}{6} \Leftrightarrow \log(x^2 + 1) = \log 5.$$

β) $\log(x^2 + 1) = \log 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

15617.α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) = \ln 1 - \ln|x| = -\ln|x|$.

β) i. Επειδή $f(x) = -h(x)$, η γραφική παράσταση της f είναι η συμμετρική της γραφικής παράστασης της h ως προς τον άξονα x΄x.



ii. Για κάθε x>1 είναι $f(x) < 0,\ h(x) > 0$, οπότε $f(x) < h(x)$ και δεν έχουν κοινά σημεία στο $(1, +\infty)$.

Για κάθε 0< x < 1 είναι $f(x) > 0,\ h(x) < 0$, οπότε $f(x) > h(x)$ και δεν έχουν κοινά σημεία στο $(0,1)$. Επομένως μοναδικό κοινό τους σημείο στο $(0, +\infty)$ μόνο για x = 1.

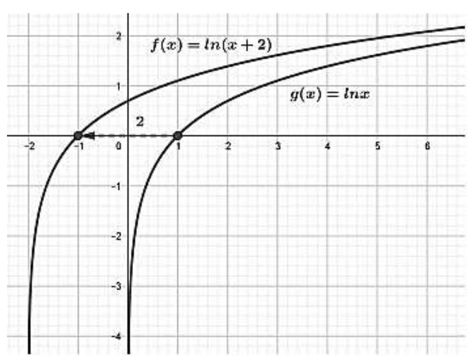
15675.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_f = (0, +\infty)$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

15808.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$, άρα $A_f = (-2, +\infty)$.

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$.Η C_f τέμνει τον x΄x στο σημείο $(-1, 0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά δυο μονάδες αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



17318.α) $f(3)=\ln(3^2-2\cdot 3+3)=\ln 6$

β) Να δείξετε ότι

$\ln 3+3\ln 2-f(3)=\ln 3+\ln 2^3-\ln 6=\ln(3\cdot 8)-\ln 6=\ln\left(\dfrac{24}{6}\right)=\ln 4$.

γ) $f(x)=\ln 4\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+3)=\ln 4\Leftrightarrow$

$x^2-2x+3=4\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 8$ και ρίζες $x=1-\sqrt{2}$ ή $x=1+\sqrt{2}$.

19908.α) Η f ορίζεται όταν $\dfrac{1-x}{x}>0\Leftrightarrow x(1-x)>0\Leftrightarrow 0<x<1$, άρα $A_f=(0,1)$.

β) $f(x)=0\Leftrightarrow \ln\dfrac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x}=1\Leftrightarrow 1-x=x\Leftrightarrow 1=2x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

20635.α) Η f ορίζεται όταν $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$, άρα $A_f=(-1,+\infty)$.

β) Η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ αν και μόνο αν $f(0)=0\Leftrightarrow \ln 1=0$ ισχύει.

γ) $f(x)=2\Leftrightarrow \ln(x+1)=2\Leftrightarrow x+1=e^2\Leftrightarrow x=e^2-1$ δεκτή.

20692.α) $f(100)=\log 100=\log 10^2=2$, $f(\sqrt{10})=\log\sqrt{10}=\log 10^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$.

β) $f(x+1)+f(x-1)=\log 10-\log 5\Leftrightarrow \log(x+1)+\log(x-1)=\log\dfrac{10}{5}\Leftrightarrow$

$\log\left[(x+1)(x-1)\right]=\log 2\Leftrightarrow x^2-1=2\Leftrightarrow x^2=3\overset{x>1}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{3}$.

20725.α) Είναι $A_f=(0,+\infty)$. Η g ορίζεται όταν $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$, άρα $A_g=(-2,+\infty)$.

β) i. $f(x)=2\Leftrightarrow \log x=2\Leftrightarrow x=10^2=100$.

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι: $g(x)=2f(x)\Leftrightarrow \log(x+2)=2\log x\Leftrightarrow$

$\log(x+2)=\log x^2\Leftrightarrow x+2=x^2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ=8 και ρίζες

$x=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=\frac{\cancel{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\cancel{2}}=1+\sqrt{2}$ >0 δεκτή

ή $x=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}<0$ απορρίπτεται.

20727.α) Είναι $A_f=\left(0,+\infty\right)$. Η g ορίζεται όταν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, άρα $A_g=\left(1,+\infty\right)$.

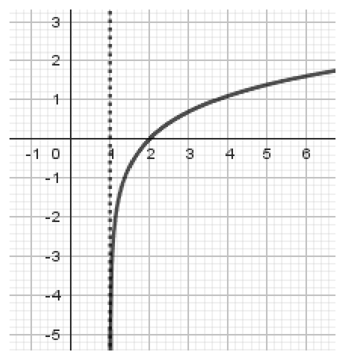
β) i. $\log x=3\Leftrightarrow x=10^3=1000$

ii. $\ln\left(x-1\right)=1\Leftrightarrow x-1=e\Leftrightarrow x=e+1$

20729.α) Η f ορίζεται όταν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$, άρα $A_f=\left(1,+\infty\right)$.

β) $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow$ $x-1=1\Leftrightarrow x=2$. Η C_f τέμνει τον x΄x στο σημείο (1,0).

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της y=lnx κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



20730.α) Η f ορίζεται όταν $1-x>0\Leftrightarrow x<1$, άρα $A_f=\left(-\infty,1\right)$.

β) Για κάθε x < 1 είναι:

$\ln\left(1-x\right)=\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow 1-x=x^2+1\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow$

x= 0 δεκτή ή $\left(x+1=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ δεκτή}\right)$.

20851.α) $A=2\log 6-\log 12=\log 6^2-\log 12=\log\frac{36}{12}=\log 3$,

$B=\log 5+\log 2=\log 10=1$.

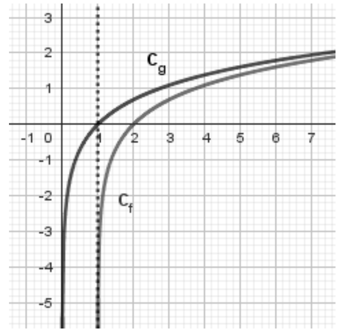
β) Επειδή η συνάρτηση $f\left(x\right)=\log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$ και 3 < 10, είναι $\log 3<\log 10\Leftrightarrow A<B$.

γ) $\log x<1\Leftrightarrow \log x<\log 10\Leftrightarrow 0<x<10$.

20853.α) Η f ορίζεται όταν $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, άρα $A_f=(1,+\infty)$.

β) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά 1 μονάδα δεξιά.

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x για x > 2.



21174.α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ 1-x>0 \Leftrightarrow x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1$, άρα $A_f=(-1,1)$.

β) Είναι $\log(x+1)=\log\frac{1}{2}-\log(1-x) \Leftrightarrow$

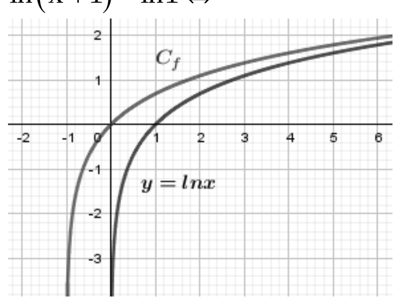
$\log(x+1)+\log(1-x)=\log\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log\left[(x+1)\cdot(1-x)\right]=\log\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$(x+1)\cdot(1-x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ή $\left(x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ οι οποίες είναι δεκτές.

21449. α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, άρα $A_f=(-1,+\infty)$.

β) Είναι $f(0)=\ln 1=0$ και $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln 1 \Leftrightarrow$ $x+1=1 \Leftrightarrow x=0$, οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της y = lnx κατά 1 μονάδα αριστερά, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



21450.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^2+4>0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x , οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει x > 0 . Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g=(0,+\infty)$.

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln(x^2+4)=\ln x+\ln 4\Leftrightarrow \ln(x^2+4)=\ln(4x)\Leftrightarrow$

$x^2+4=4x\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$ δεκτή.

21472.α) Πρέπει $\begin{cases}x+1>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

Είναι $\ln(x+1)=\ln(2x)\Leftrightarrow x+1=2x\Leftrightarrow x=1$ δεκτή.

β) Για κάθε x > 0 είναι $\ln(x+1)>\ln(2x)\Leftrightarrow x+1>2x\Leftrightarrow x<1$, οπότε $x\in(0,1)$.

21473.α) Η παράσταση A ορίζεται για τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει:

$\begin{cases}x+6>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-6\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$.

β) Για κάθε x > 0 είναι

$\ln x+\ln(x+6)=\ln 7\Leftrightarrow \ln[x(x+6)]=\ln 7\Leftrightarrow x^2+6x=7\Leftrightarrow$

$x^2+6x-7=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ = 64 και ρίζες $x=1$ δεκτή, $x=-7$ που απορρίπτεται.

21675.α) $1-\log 2=\log 10-\log 2=\log\frac{10}{2}=\log 5$.

β) $\log(x^2+1)=1-\log 2\Leftrightarrow \log(x^2+1)=\log 5\Leftrightarrow$

$x^2+1=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

21952.α) $A=\ln\sqrt{e}+\log\sqrt[3]{100}=\ln(e)^{\frac{1}{2}}+\log(100)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\log 10^2\Leftrightarrow$

$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$.

β) $0<\ln A<1 \Leftrightarrow \ln 1<\ln\frac{7}{6}<\ln e \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} 1<\frac{7}{6}<e$ ισχύει.

21953. α) $A=e^{\ln 2}+10^{2\log\sqrt{5}}=2+10^{\log\left(\sqrt{5}\right)^2}=2+10^{\log 5}=2+5=7$

β) $0<\log A<1 \Leftrightarrow 0<\log 7<1 \Leftrightarrow \log 1<\log 7<\log 10 \overset{\log x \nearrow}{\Leftrightarrow} 1<7<10$ ισχύει.

21954. α) i. $\log 10^{10}=10$ ισχύει από την ιδιότητα $\log_\alpha \alpha^x=x$, $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, $x>0$

ii. $A=\ln(\ln e)+\log(\log 10^{10})=\ln 1+\log 10=0+1=1$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\log(x^2+1)=1 \Leftrightarrow x^2+1=10 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

21956.α) $A=2\log 5+3\log 2-\log 20=\log 5^2+\log 2^3-\log 20 \Leftrightarrow$

$A=\log\left(25\cdot 8\right)-\log 20 \Leftrightarrow A=\log\frac{200}{20}=\log 10=1$.

β) Αρχικά πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$.

$\ln\left(e^x-1\right)=1 \Leftrightarrow e^x-1=e \Leftrightarrow e^x=e+1 \Leftrightarrow x=\ln\left(e+1\right)$.

Θέμα 4ο

15015.α) $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή

$\left(x^2-x-2=0,\ \Delta=1+8=9,\ x_1=\dfrac{1+3}{2}=2,\ x_2=\dfrac{1-3}{2}=-1\right)$

β) Για κάθε x > 0 είναι:

ω	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
ω		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\omega^2-\omega-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(\omega)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\ln^3 x-\ln^2 x-2\ln x=0 \Leftrightarrow P(\ln x)=0 \Leftrightarrow (\ln x=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$\left(\ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2\right)$ ή $\left(\ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\right)$

γ) Θέτουμε lnx = ω και η ανίσωση γίνεται

$\omega^3-\omega^2-2\omega>0 \Leftrightarrow \omega\left(\omega^2-\omega-2\right)>0 \Leftrightarrow$

$P(\omega)>0 \Leftrightarrow -1<\omega<0$ ή $\omega>2$

Άρα $\left(-1<\ln x<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}<x<1\right)$ ή $\ln x>2 \Leftrightarrow x>e^2$ δεκτές

15021.α) Η f ορίζεται όταν $x \neq 0$, άρα $A=\mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \in A$ και $-x \in A$.

Είναι $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(x)$, οπότε η f είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το O(0,0).

γ) $f(\ln 2)+f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)=f(\ln 2)+f\left(\ln 2^{-1}\right)=f(\ln 2)+f(-\ln 2)=$

$f(\ln 2)-f(\ln 2)=0$.

δ) Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ είναι

$f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=f(\eta\mu\theta)+f(-\eta\mu\theta)=f(\eta\mu\theta)-f(\eta\mu\theta)=0$.

15679.α)

ω	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$\omega-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\omega+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\omega-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
Γινόμενο	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3}>0 \Leftrightarrow (\omega^2-1)(\omega-3)>0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega+1)(\omega-3)>0 \Leftrightarrow$

$-1<\omega<1$ ή $\omega>3$.

β) Η παράσταση Α ορίζεται όταν

$\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$ και αν θέσουμε $e^x=\omega$ είναι $\dfrac{\omega^2-1}{\omega-3}>0 \Leftrightarrow -1<\omega<1$ ή $\omega>3$.

Άρα $\left(-1<e^x<1 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0\right)$ ή $\left(e^x>3 \Leftrightarrow x>\ln 3\right)$.

γ) $A=-\ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)=\ln 3^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-3}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$3e^{2x}-\cancel{3}=e^x-\cancel{3} \Leftrightarrow 3e^{2x}-e^x=0 \Leftrightarrow 3e^{2x}\left(3e^x-1\right)=0 \Leftrightarrow e^x=0$ αδύνατη

ή $3e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{3}=-\ln 3$.

15678.α) Παρατηρούμε ότι $P(1)=0$, οπότε το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1. Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

-1	-4	- 1	6	ρ=1
	-1	-5	-6	
-1	-5	-6	0	

x	$-\infty$	-3		-2		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Γινόμενο	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$P(x)=(x-1)\left(-x^2-5x-6\right)=-(x-1)\left(x^2+5x+6\right)$

Το τριώνυμο x^2+5x+6 έχει διακρίνουσα Δ= 1 και ρίζες -2 , -3, άρα

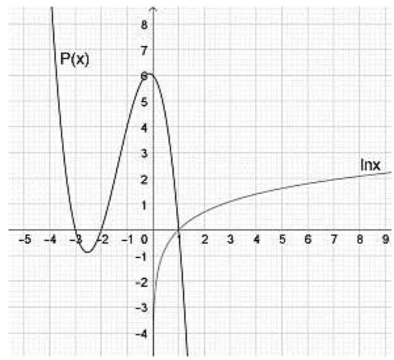
$P(x)=-(x-1)(x+2)(x+3)$

$P(x)<0 \Leftrightarrow -(x-1)(x+2)(x+3)<0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x+2)(x+3)>0 \Leftrightarrow x\in(-3,-2)\cup(1,+\infty)$.

β) Με βάση το α) ερώτημα, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) θα πρέπει να είναι κάτω από τον άξονα x΄x , για κάθε $x \in (-3,-2) \cup (1,+\infty)$, οπότε το μόνο σχήμα που το ικανοποιεί είναι το γ.

γ) Αν στο σχήμα γ συμπληρώνουμε τη γραφική παράσταση της lnx όπως φαίνεται παρακάτω, θα διαπιστώσομε ότι έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη 1 , που σημαίνει ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την x =1.



15688.α) Η f ορίζεται όταν $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A = (0,+\infty)$.

β) Για κάθε x > 0 είναι:

$$f(x) = x-1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$e^x - 1 - \frac{e^x}{e} = 0 \Leftrightarrow e \cdot e^x - e - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e-1) = e \Leftrightarrow e^x = \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln\frac{e}{e-1}.$$

γ) Για κάθε x > 0 είναι: $f(x) = x + \alpha \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = x + \alpha \Leftrightarrow$

$$e^x - 1 = e^{x+\alpha} \Leftrightarrow e^x - 1 - e^x e^\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$e^x(1 - e^\alpha) = 1 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{1}{1-e^\alpha}$ αδύνατη γιατί για α > 0 είναι

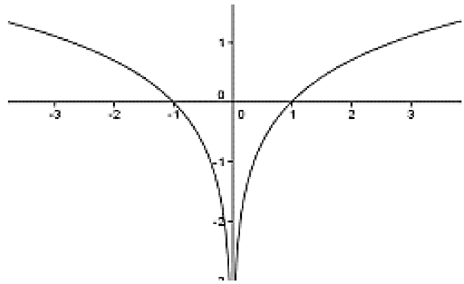
$e^\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - e^\alpha < 0$ και $e^x > 0$.

15690.α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια.
Επειδή $A_f = \mathbb{R}^*$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$.

Είναι $f(-x) = \frac{1}{2}\ln(-x)^2 = \frac{1}{2}\ln x^2 = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

β) Για κάθε x > 0 είναι

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln x=\ln x$$



γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) = lnx, x > 0 και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα y΄y .

δ) Η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία y = 2, όταν $f(x)<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x^2<2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\ln|x|<2 \Leftrightarrow$

$|x|<e^2 \Leftrightarrow -e^2<x<e^2$. Όμως $x\neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία y = ln2 για $x\in(-e^2,0)\cup(0,e^2)$.

15694.α) Θέλουμε να είναι $m<M \Leftrightarrow m-M<0 \Leftrightarrow$

$$5\log\left(\frac{d}{10}\right)<0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{d}{10}\right)<0=\log 1 \Leftrightarrow \frac{d}{10}<1 \Leftrightarrow d<10$$

β) $\mu-M=5\log\left(\frac{d}{10}\right) \Leftrightarrow \mu-5\log\left(\frac{d}{10}\right)=M \Leftrightarrow$

$$M=1{,}157-5\log\left(\frac{100}{10}\right) \Leftrightarrow$$

$$M=1{,}157-5\log 10=1{,}157-5=-3{,}843\,.$$

γ) $m-M=5\log\left(\frac{d}{10}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{d}{10}\right)=\frac{m-M}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{10}=10^{\frac{m-M}{5}} \Leftrightarrow$

$$d=10\cdot 10^{\frac{m-M}{5}}=10^{1+\frac{m-M}{5}}=10^{\frac{5+m-M}{5}}\,.$$

δ) $d=10^{\frac{5+0{,}46+5{,}14}{5}}=10^{\frac{10{,}6}{5}}=10^{\frac{53}{25}}=\sqrt[25]{10^{53}}\cong 131$ parsec.

16001.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει

$$\begin{cases} x>0 \\ x\ln x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1, \text{ άρα } A_f = [1,+\infty).$$

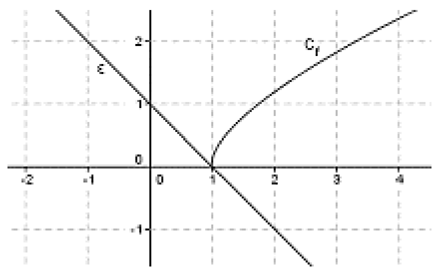
Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$, άρα $A_g = [1,+\infty)$.

β) Είναι

$$f(x)-g(x)=\sqrt{x\ln x}-\sqrt{\ln x}=\sqrt{x}\sqrt{\ln x}-\sqrt{\ln x}=\sqrt{\ln x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$

Επειδή $x \ge 1$, είναι $\sqrt{\ln x} \ge 0$ και $\sqrt{x}-1 \ge 0$, άρα

$f(x)-g(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.



γ) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

ii. Είναι

$$\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25}{15}-\frac{21}{15}=\frac{4}{15}>0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}>\frac{7}{5}$$

$$\overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{5}{3}\right)>f\left(\frac{7}{5}\right).$$

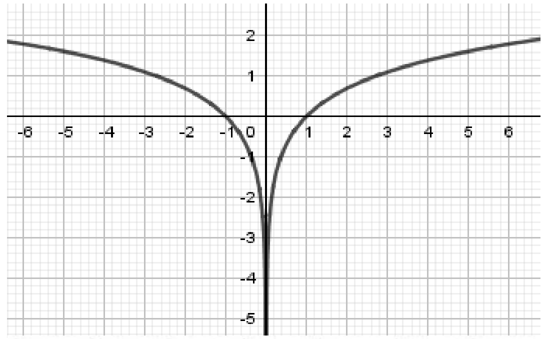
δ) Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία (1,0) και (0,1) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το μοναδικό κοινό σημείο της με την C_f είναι το (1,0) .

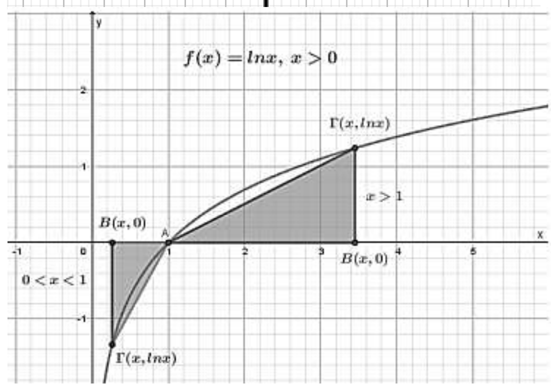
Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = x-1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

18865. α) Η f ορίζεται όταν $|x|>0 \Leftrightarrow x \ne 0$, άρα $A_f = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$ και $f(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της f από τελείται από τη γραφική παράσταση της y = lnx και από τη συμμετρική της ως προς τον y΄y y=ln(-x), x< 0.





δ) Αν x > 1, τότε

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒ})(\text{ΒΓ}) \Leftrightarrow$$

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x.$$

Αν 0 < x < 1, τότε

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒ})(\text{ΒΓ}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(1-x)(-\ln x) \Leftrightarrow$$

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒ})(\text{ΒΓ}) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x.$$

Άρα $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

20857.α) Επειδή το πολυώνυμο έχει παράγοντα το x- 3 είναι

$P(3) = 0 \Leftrightarrow 3^3 - \alpha \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 - \beta = 0 \Leftrightarrow 27 - 9\alpha + 21 - \beta = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + \beta = 48$ (1)

Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon = -16$, ισχύει ότι

$P(-1) = -16 \Leftrightarrow -1 - \alpha - 7 - \beta = -16 \Leftrightarrow -\alpha - \beta = -8$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $8\alpha = 40 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και από την (1) $45 + \beta = 48 \Leftrightarrow \beta = 3$.

β) Είναι

1	- 5	7	- 3	ρ=1
	1	-4	3	
1	-4	3	0	

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(x-1=0 \Leftrightarrow x=1\right)$ ή $\left(x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=3\right)$.

γ) $P(x)<0 \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty,1) \cup (1,3)$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$-$	0	$-$	0	$+$	

δ) $P(\ln\kappa)<0 \Leftrightarrow$

$\left(\ln\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa<e\right)$ ή $\left(1<\ln\kappa<3 \Leftrightarrow e<\kappa<e^3\right)$.

21445.α) Για να ορίζεται η f πρέπει

$\dfrac{4^x-1}{2^x+5}>0 \Leftrightarrow \left(4^x-1\right)\left(2^x+5\right)>0 \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow} 4^x-1>0 \Leftrightarrow 4^x>4^0 \Leftrightarrow x>0$, άρα $A_f=(0,+\infty)$.

β) $f(x)=\log 3-\log 7 \Leftrightarrow \log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}=\log\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow \dfrac{4^x-1}{2^x+5}=\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow$

$7\left(4^x-1\right)=3\left(2^x+5\right) \Leftrightarrow$

$7\cdot\left(2^x\right)^2-7=3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow 7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0$.

Θέτουμε $2^x=y>0$ και η εξίσωση γίνεται $7y^2-3y-22=0$.
Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=625 και ρίζες $y=2$ ή $y=-\dfrac{11}{7}$ που απορρίπτεται. Άρα $2^x=2 \Leftrightarrow x=1$.

γ) $f(x)>\log 3-\log 7 \Leftrightarrow \log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}>\log\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow$

$\dfrac{4^x-1}{2^x+5}>\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow 7\left(4^x-1\right)>3\left(2^x+5\right) \Leftrightarrow$

$7\cdot\left(2^x\right)^2-7>3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow 7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22>0 \Leftrightarrow$

$7y^2-3y-22>0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{11}{7}$ αδύνατο ή $y>2 \Leftrightarrow$

$2^x>2 \Leftrightarrow x>1$.

21446.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x-2>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$, άρα $A_f=(\ln 2,+\infty)$.

β) $f(x)+x=3\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^x-2\right)+\ln e^x=\ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left[e^x\left(e^x-2\right)\right]=\ln 8 \Leftrightarrow$

$\left(e^x\right)^2-2e^x=8 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2e-8=0$

Θέτουμε $e^x=y>0$ και η εξίσωση γίνεται $y^2-2y-8=0$.
Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=36 και ρίζες $y=4$ ή $y=-2$ απορρίπτεται.

Άρα $e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$ δεκτή.

γ) $f(x)+x\geq 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^x-2\right)+\ln e^x\geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \ln\left[e^x\left(e^x-2\right)\right]\geq \ln 8 \Leftrightarrow$

$\left(e^x\right)^2-2e^x\geq 8 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2e-8\geq 0 \Leftrightarrow y^2-2y-8\geq 0 \Leftrightarrow y\leq -2$ αδύνατο ή $y\geq 4 \Leftrightarrow e^x\geq 4 \Leftrightarrow x\geq \ln 4$.

21447.α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα ήταν $P(0)=200e^{c\cdot 0}=200$ βακτήρια.

β) Έχουμε:

$$P(1)=328 \Leftrightarrow 200e^c=328 \Leftrightarrow e^c=\frac{328}{200}=1,64 \Leftrightarrow c=\ln 1,64 \cong 0,5 .$$

γ) Ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, δηλαδή

$$10P(0)<P(t)<100P(0) \Leftrightarrow$$

$$10\cdot 200<200e^{\frac{1}{2}t}<100\cdot 200 \Leftrightarrow 10<e^{\frac{1}{2}t}<100 \Leftrightarrow \ln 10<\frac{1}{2}t<\ln 100 \Leftrightarrow$$

$$2\ln 10<t<2\ln 10^2 \Leftrightarrow 2\ln 10<t<4\ln 10 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot 2,3<t<4\cdot 2,3 \Leftrightarrow 4,6<t<9,2 .$$

21470.α) Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, οπότε

$$Q(2)=\frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow Q_0e^{2t}=\frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow \left(e^t\right)^2=\frac{1}{3} \overset{e^t>0}{\Leftrightarrow} e^t=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Είναι $Q(t)=Q_0e^{ct}=Q_0\left(e^t\right)^c=Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

β) $Q(4)=1 \Leftrightarrow Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=1 \Leftrightarrow \frac{1}{9}Q_0=1 \Leftrightarrow Q_0=9$ κιλά

γ) $Q(t)=\frac{1}{81} \Leftrightarrow 9\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t=\frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^2\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^t=\frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^2\cdot 3^{-\frac{t}{2}}=3^{-4} \Leftrightarrow$

$3^{2-\frac{t}{2}}=3^{-4} \Leftrightarrow 2-\frac{t}{2}=-4 \Leftrightarrow 6=\frac{t}{2} \Leftrightarrow t=12$.

Συνεπώς μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

21474.α) Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 1ης εβδομάδας είναι: $10-\frac{15}{100}\cdot 10=10-1,5=8,5$ λίτρα.

Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο στο τέλος της 2ης εβδομάδας είναι:

$8,5-\frac{15}{100}\cdot 8,5=8,5(1-0,15)=8,5\cdot 0,85=7,225$ λίτρα.

β) Η αρχική ποσότητα του υγρού στο δοχείο (δηλαδή η ποσότητα τη χρονική στιγμή $t=0$) είναι 10 λίτρα, οπότε

$V(0)=V_0\cdot\alpha^0=10 \Leftrightarrow V_0=10$.

Είναι $V(1)=8,5 \Leftrightarrow 10\cdot\alpha=8,5 \Leftrightarrow \alpha=0,85$.

γ) Θα βρούμε μετά από πόσες εβδομάδες ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από
το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή θα βρούμε τις τιμές του t ώστε:

$V(t)<\frac{1}{2}V_0 \Leftrightarrow 10(0,85)^t<\frac{10}{2} \Leftrightarrow (0,85)^t<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log(0,85)^t<\log\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$t\log(0,85)<-0,3 \Leftrightarrow -0,07t<-0,3 \Leftrightarrow t>\frac{0,3}{0,07}=\frac{30}{7}$

Άρα μετά από εβδομάδες $\frac{30}{7}=4\frac{2}{7}$ (4 εβδομάδες και 2 ημέρες) ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

21678.α) Είναι $Q(t')=\frac{1}{2}Q_o \Leftrightarrow Q_o e^{ct'}=\frac{1}{2}Q_o \Leftrightarrow e^{ct'}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow ct'=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$ct'=-\ln 2 \Leftrightarrow t'=-\frac{\ln 2}{c}$.

β)Για το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας −14 ισχύει t ′ = 5730,
οπότε έχουμε $-\frac{\ln 2}{c}=5730 \Leftrightarrow 5730c=-\ln 2 \Leftrightarrow c=-\frac{\ln 2}{5730}$, οπότε ο τύπος που μας δίνει την ποσότητα του άνθρακα −14 που απομένει t χρόνια μετά δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$.

γ) Είναι $Q(t)=\frac{25}{100}Q_o \Leftrightarrow Q_o e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}=\frac{1}{4}Q_o \Leftrightarrow$

$e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730}t=\ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$-\frac{\ln 2}{5730}t=-\ln 4 \Leftrightarrow \ln 2\cdot t=5730\cdot\ln 2^2 \Leftrightarrow \ln 2\cdot t=11460\ln 2 \Leftrightarrow t=11460$

οπότε το οστό εκτιμάται ότι είναι ηλικίας 11.460 χρόνων.

21680.α) $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8) \Leftrightarrow \ln 2+3\ln 4=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 8 \Leftrightarrow$

$\ln 2+3\ln 2^2=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 2^3 \Leftrightarrow$

$\ln 2+6\ln 2=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot 7\cdot\cancel{3}\cdot\ln 2 \Leftrightarrow 7\ln 2=7\ln 2$ ισχύει.

β) Για κάθε $x<1$ είναι $x-1<0,\ \ln x<0$ άρα $f(x)=(x-1)\ln x>0$.

Για κάθε $x\geq 1$ είναι $x-1\geq 0,\ \ln x\geq 0$ άρα $f(x)=(x-1)\ln x\geq 0$.

Επειδή για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\geq 0$, η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) i. Οι τετμημένες των κοινών τους σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=2x-2$.

Για κάθε $x>0$ είναι

$f(x)=2x-2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\ln x-2(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(\ln x-2)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή

$(\ln x-2=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2)$.

Για x = 1 είναι y = 0 και για $x = e^2$ είναι $y = 2e^2 - 2$, οπότε κοινά σημεία της C_f με την ε είναι τα (1,1) και $\left(x = e^2, 2e^2 - 2\right)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία όταν
$f(x) < 2x - 2 \Leftrightarrow$
$(x-1)(\ln x - 2) < 0$

x	0	1	e^2 $+\infty$
$x-1$	−	+	+
lnx-2	−	−	+
Γινόμενο	+	−	+

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα.από όπου προκύπτει ότι $x \in \left(1, e^2\right)$.

21679.α) Είναι $T(0) = T_\alpha + ce^0 \Leftrightarrow 73 = 25 + c \Leftrightarrow c = 48$.

β) Είναι $T(10) = 61 \Leftrightarrow 25 + 48e^{-10\kappa} = 61 \Leftrightarrow$

$$48e^{-10\kappa} = 36 \Leftrightarrow e^{-10\kappa} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$-10\kappa = \ln\frac{3}{4} \Leftrightarrow -10\kappa = \ln 0,75 \Leftrightarrow -10\kappa = -0,3 \Leftrightarrow \kappa = 0,03.$$

γ) $T(40) = 25 + 48e^{-0,03\cdot 40} = 25 + 48e^{-1,2} = 25 + 48\cdot 0,3 = 25 + 14,4 = 39,4$

Επομένως η θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμά του είναι ο 39,4^o C.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t) = 25 + 48e^{-0,3t}$ όπως φαίνεται και στο δοσμένο σχήμα είναι γνησίως φθίνουσα και από το ερώτημα γ) ισχύει T(40) = 39,4 , οπότε αν $T(t_o)$ =40 , τότε T(t) > T(40) και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης παίρνουμε $t_0 < 40$. Επομένως, πριν περάσουν 40 λεπτά, η θερμοκρασία του ροφήματος έχει ήδη πέσει κάτω από τους ο 40 και ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

21950.α)

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Leftrightarrow$$

ω	$-\infty$ -6	2	$+\infty$
$(\omega-2)^2$	+	+	+
$\omega^2+2\omega+4$	+	+	+
$\omega-6$	−	+	+
Γινόμενο	−	+	+

$$\left(\omega^3 - 8\right)\left(\omega^2 + 4\omega - 12\right) > 0 \Leftrightarrow (\omega-2)\left(\omega^2 + 2\omega + 4\right)(\omega - 2)(\omega + 6) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\omega-2)^2\left(\omega^2 + 2\omega + 4\right)(\omega + 6) > 0 \Leftrightarrow \omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty).$$

β) Η f ορίζεται όταν $\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}>0$ και αν θέσουμε

$e^{x}=\omega>0$ γίνεται $\frac{\omega^{3}-8}{\omega^{2}+4\omega-12}>0 \Leftrightarrow \left(-6<\omega<2 \Leftrightarrow e^{x}<2 \Leftrightarrow x<\ln 2\right)$

ή $\left(\omega>2 \Leftrightarrow x>\ln 2\right)$.

Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ) Για $x \neq \ln 2$ είναι:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}=1 \Leftrightarrow e^{3x}-8=e^{2x}+4e^{x}-12 \Leftrightarrow$$

$$e^{3x}-e^{2x}-4e^{x}+4=0 \Leftrightarrow e^{2x}\left(e^{x}-1\right)-4\left(e^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)\left(e^{2x}-4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}+2\right)=0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0 \text{ δεκτή}\right)$ ή

$\left(e^{x}-2=0 \Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2 \text{ απορρίπτεται}\right)$ ή

$\left(e^{x}+2=0 \Leftrightarrow e^{x}=-2 \text{ αδύνατη}\right)$.

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x είναι το (0,0) .

25463.α) Επειδή η C_f διέρχεται από το Α, ισχύει ότι:

$f(0)=2 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\ln 1}+\ln 1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2$

Επειδή η C_f διέρχεται από το Β, ισχύει ότι:

$f\left(e^{2}-1\right)=2\sqrt{2}+4 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\ln e^{2}}+\ln e^{2}+2=2\sqrt{2}+4 \Leftrightarrow$

$\alpha\sqrt{2}+2+2=2\sqrt{2}+4 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha=2$.

Είναι $f(x)=2\sqrt{\ln(x+1)}+\ln(x+1)+2,\ \ x\geq 0$.

Επειδή η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω, είναι

$g(x)=f(x)+3=2\sqrt{\ln(x+1)}+\ln(x+1)+5,\ \ x\geq 0$.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο (5, 9.5) περίπου ανήκει στη C_g,

άρα η ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά είναι περίπου τα 9,5 χρόνια.

Για $x \ge 0$ είναι: $g(x)=5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)}+\ln(x+1)+5=5 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{\ln(x+1)}+\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)}=-\ln(x+1)$ (1).

Επειδή $2\sqrt{\ln(x+1)} \ge 0$ και $-\ln(x+1) \ge 0$ για κάθε $x \ge 0$, η (1) γίνεται:

$\left(2\sqrt{\ln(x+1)}\right)^2=\left(-\ln(x+1)\right)^2 \Leftrightarrow 4\ln(x+1)=\ln^2(x+1) \Leftrightarrow$

$4\ln(x+1)-\ln^2(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\ln(x+1)\left(4-\ln(x+1)\right)=0 \Leftrightarrow \left(\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0\right)$ ή

$\left(4-\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=4 \Leftrightarrow x+1=10^4=10.000 \Leftrightarrow x=9.999\right)$.

21674.α) Η f ορίζεται όταν $10^x-2>0 \Leftrightarrow 10^x>2 \Leftrightarrow x>\log 2$, άρα $A=(\log 2,+\infty)$.

β) i. Για κάθε $x \in (\log 2,+\infty)$ είναι:

$\sqrt{\frac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2} \Leftrightarrow \frac{10^x}{3}=10^x-2 \Leftrightarrow 2=10^x-\frac{10^x}{3} \Leftrightarrow$

$6=3\cdot 10^x-10^x \Leftrightarrow 2\cdot 10^x=6 \Leftrightarrow 10^x=3 \Leftrightarrow x=\log 3$ δεκτή.

ii. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \log\sqrt{10^x-2}=\log\sqrt{\frac{10^x}{3}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ και από το προηγούμενο σκέλος είναι $x=\log 3$. Είναι

$f(\log 3)=\log\sqrt{10^{\log 3}-2}=\log\sqrt{3-2}=\log 1=0$, οπότε κοινό σημείο το (log3, 0).

37476.α) Είναι $P(x)=x^3-2x^2-x+2=$

$x^2(x-2)-(x-2)=(x-2)(x^2-1)=(x-1)(x+1)(x-2)$, άρα το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x-1)$ είναι $(x+1)(x-2)$.

β) $P(x)<0 \Leftrightarrow$
$x \in (-\infty,-1) \cup (1,2)$.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

γ) $1<\log 20<2 \Leftrightarrow$
$\log 10<\log 20<\log 10^2 \Leftrightarrow$
$10<20<100$ ισχύει.
δ) Επειδή $P(x)<0$ για
κάθε $x \in (1,2)$ και $\log 20 \in (1,2)$, είναι $P(\log 20)<0$.

Θέμα 3ο

15392.α) Είναι $f(0)=2^0=1$, άρα A(0,1).

Είναι $g(x)=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{1-x}=5^{-1} \Leftrightarrow 1-x=-1 \Leftrightarrow 2=x$, άρα $B\left(2,\frac{1}{5}\right)$.

β) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2^x=5^{1-x} \Leftrightarrow 2^x=\frac{5}{5^x} \Leftrightarrow$

$2^x \cdot 5^x=5 \Leftrightarrow 10^x=5 \Leftrightarrow x=\log 5$, άρα $x_\Sigma=\log 5$.

γ) $x_B-x_\Sigma=2-\log 5=\log 10^2-\log 5=\log\frac{100}{5}=\log 20$

15676.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα
$A_f=(0,+\infty)$.

β) $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)=0 \Leftrightarrow e^x-1=1 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(ln2,0).
γ) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον x΄x για τις τιμές του x > 0 για τις οποίες είναι

$f(x)<0 \Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)<0 \Leftrightarrow e^x-1<1 \Leftrightarrow e^x<2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<\ln 2$.

Αναλογίες

Θεώρημα Θαλή

2ο Θέμα

14534. α) Επειδή ΔΕ // ΒΓ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι:

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{2}{3} \text{ και } \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΖΜ}} = \frac{\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{\text{ΑΜ}}}{\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{\text{ΑΜ}}} = 2$$

β) Είναι $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = \frac{2}{3}\text{ΑΒ} = \frac{2}{3}\cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$ και

$$\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\text{ΑΓ} - \text{ΕΓ}}{\text{ΕΓ}} = 2 \Leftrightarrow 9 - \text{ΕΓ} = 2\text{ΕΓ} \Leftrightarrow 9 = 3\text{ΕΓ} \Leftrightarrow \text{ΕΓ} = 3$$

14579.α) Εφόσον ΑΒ = 3ΑΔ είναι ΒΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή ΒΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}} = 2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6. Επομένως $\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΓΖ}} = \frac{2,6}{1,3} = 2$.

Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

15830.α) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΓ}}$.

β) Είναι ΜΕ // ΑΔ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ΒΓ), οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΜΔ}{ΜΓ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}$. Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΜΔ}{ΜΓ}$$

15831.α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του ΒΜ και το Μ μέσο της ΒΓ. Άρα $ΜΔ=\frac{1}{2}ΜΒ=\frac{1}{2}ΜΓ$.

Επίσης η ΜΕ // ΑΔ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΜΔ}{ΜΓ}=\frac{\frac{1}{2}ΜΓ}{ΜΓ}=\frac{1}{2}.$$

β) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι:

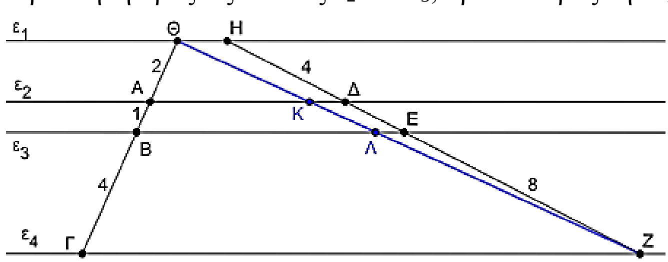
$$\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{1}{2}.$$

21987.α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ τέμνουν τις ευθείες ΓΘ και ΖΗ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως: $\frac{ΘΑ}{ΗΔ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}\Leftrightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{ΔΕ}\Leftrightarrow 2ΔΕ=4\Leftrightarrow ΔΕ=2$.

β) Οι ευθείες ΘΓ και ΗΖ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $ε_2$ και $ε_3$ στα σημεία Α, Β και Δ, Ε αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Ζ είναι σημεία των ευθειών ΘΓ και ΗΖ αντίστοιχα, ώστε

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{1}{4} \text{ και } \frac{ΔΕ}{ΕΖ}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}, \text{ άρα } \frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ}.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓΖ ή $ε_4$ είναι παράλληλη προς τις ευθείες $ε_2$ και $ε_3$, άρα και προς την $ε_1$.



γ)

Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει τις $ε_2$ και $ε_3$ στα Κ και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες

ε_2 , ε_3 και ε_4 τέμνουν τις ευθείες ΘΓ και ΘΖ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΚΛ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΛΖ}}\Leftrightarrow\frac{1}{\text{ΚΛ}}=\frac{4}{\text{ΛΖ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΛΖ}}{\text{ΚΛ}}=4\,.$$

22132.α) Οι βάσεις ΑΔ και ΒΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του
θεωρήματος του Θαλή η ΑΔ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές ΕΒ και ΕΓ του τριγώνου ΕΒΓ τις οποίες τέμνει. Επομένως:

$$\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΖ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΓ}}\Leftrightarrow\frac{1}{1,5}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΖΓ}}\Leftrightarrow \text{ΖΓ}=1,5\cdot\text{ΑΒ}\,.$$

β) $\text{ΖΓ}=1,5\cdot\text{ΑΒ}=1,5\cdot 4=6$

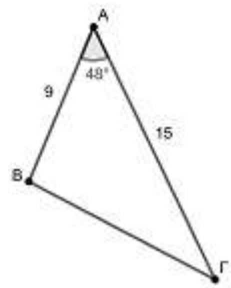
γ) Η ΑΖ είναι παράλληλη στην ΒΓ, γιατί το Ζ είναι σημείο της βάσης ΑΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από
εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΕΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΕΑ
και ΕΖ του τριγώνου ΕΑΖ και την παράλληλη ΒΓ στην ΑΖ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΕΑΖ, άρα:

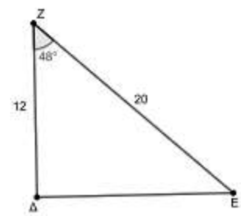
$$\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΕΒ}}=\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΕΓ}}=\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΒΓ}}\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{\text{ΑΖ}}{10}\Leftrightarrow 5\text{ΑΖ}=10\Leftrightarrow\text{ΑΖ}=2$$

Ομοιότητα

2ο Θέμα

14535. α) Είναι $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ και $\frac{A\Gamma}{ZE}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$, άρα $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{ZE}$.





Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $A=Z$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

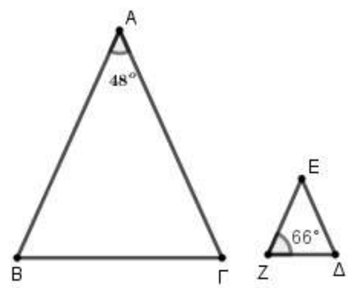
β) i. Είναι $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{A\Gamma}{ZE}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{Z\Delta}=\frac{3}{4}$, είναι $\lambda=\frac{3}{4}$

14536.α) Επειδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές με ΕΔ = ΕΖ, είναι $Z=\Delta=66^\circ$, τότε: $E+Z+\Delta=180^\circ \Leftrightarrow$

$E+66^\circ+66^\circ=180^\circ \Leftrightarrow$

$E=180^\circ-132^\circ=48^\circ$.



Επειδή $AB=3\cdot E\Delta$ και ΑΒ = ΑΓ, ΕΔ = ΕΖ, είναι $\frac{AB}{E\Delta}=3$, $\frac{A\Gamma}{EZ}=3$, δηλαδή $\frac{AB}{E\Delta}=\frac{A\Gamma}{EZ}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $A=E$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

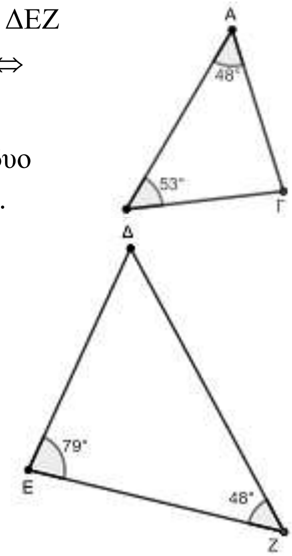
β) i. Είναι $\frac{AB}{E\Delta}=\frac{A\Gamma}{EZ}=\frac{B\Gamma}{Z\Delta}$

ii. Επειδή $\frac{AB}{E\Delta}=3$, είναι και $\frac{B\Gamma}{Z\Delta}=3$.

14537α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ έχουμε: $\Delta + E + Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta + 79 + 48^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\Delta = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

Επειδή $B = \Delta$ και $A = Z$ τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.



β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ είναι οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ, οπότε είναι ομόλογες,

απέναντι από τις ίσες γωνίες A, Z είναι οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ, οπότε είναι ομόλογες.

Τέλος απέναντι από τις ίσες γωνίες Γ, E είναι οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ, οπότε είναι ομόλογες.

ii. Οι ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι:

$$\frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AB}{\Delta Z}$$

14538.α) Επειδή ΑΒ//ΔΕ είναι $A = E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΕ και $B = \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ.

Τα δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες A, E ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$

- Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$ και

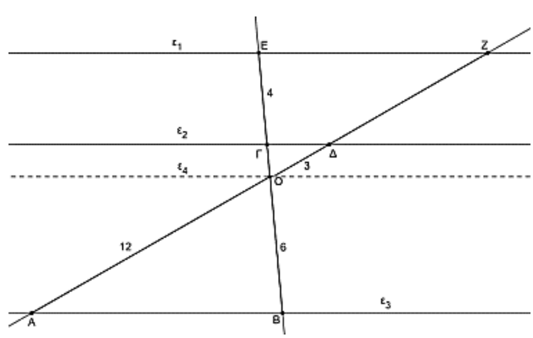
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\Gamma B$, $\Delta\Gamma E$ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{AB}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, οπότε
$\lambda = \frac{ΒΓ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΓΕ} = \frac{2\cancel{ΓΕ}}{\cancel{ΓΕ}} = 2$.

14546.α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΒ και ΔΕ, είναι ΓΑ = ΓΒ και ΓΔ = ΓΕ.
Είναι $\frac{ΓΑ}{ΓΔ} = \frac{ΓΒ}{ΓΕ}$ και $ΑΓΒ = ΔΓΕ$ ως κατακορυφήν, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.
β) i. Είναι $\frac{ΓΑ}{ΓΕ} = \frac{ΓΒ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ}$
ii. Είναι $\frac{ΓΑ}{ΓΕ} = \frac{ΓΒ}{ΓΔ} = \frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{2\cancel{ΔΕ}}{\cancel{ΔΕ}} = 2 \Leftrightarrow \frac{ΓΑ}{ΓΕ} = 2 \Leftrightarrow ΓΑ = 2 \cdot ΓΕ$.

16100.α) $\frac{ΒΔ}{ΑΓ} = \frac{12}{4} = 3,\ \frac{ΔΕ}{ΕΓ} = \frac{6}{2} = 3,\ \frac{ΒΕ}{ΑΕ} = \frac{15}{5} = 3$.
β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.
γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:
- $Α = Β$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα
- $Γ = Δ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα
- $ΑΕΓ = ΒΕΔ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

16086.α) Φέρνουμε $ε_4 \parallel ε_2$ που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες $ε_2$, $ε_4$, $ε_3$ που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε
$\frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΟΒ}{ΟΓ} \Leftrightarrow \frac{12}{3} = \frac{6}{ΟΓ} \Leftrightarrow$
$12ΟΓ = 18 \Leftrightarrow ΟΓ = \frac{3}{2}$.



β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

- $\mathrm{EZO}=\mathrm{BAO}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.

- $\mathrm{ZEO}=\mathrm{ABO}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OZ}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{O\Delta}+\mathrm{\Delta Z}}{\mathrm{OA}}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}.$$

16099.α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:

- $\mathrm{A}=\Delta$ (υπόθεση)

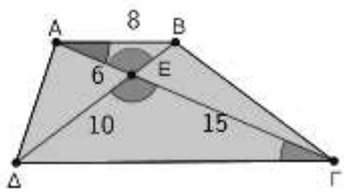
- $\mathrm{AB\Gamma}=\mathrm{EB\Delta}=90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Άρα $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{E\Delta}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}}\Leftrightarrow\frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{24}^{6}}=\frac{\mathrm{AB}}{16}\Leftrightarrow 6\mathrm{AB}=144\Leftrightarrow\mathrm{AB}=\frac{144}{6}=24$

16113.α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν :



- $\mathrm{E\hat{A}B}=\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ και
- $\mathrm{A\hat{E}B}=\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ γιατί είναι κατακορυφήν.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια είναι: $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E\Delta}}=\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta}$.

γ) $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{E\Delta}}=\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\frac{6}{15}=\frac{\mathrm{BE}}{10}=\frac{8}{\Gamma\Delta}$

$$\frac{6}{15}=\frac{\mathrm{BE}}{10}\Leftrightarrow 15\cdot\mathrm{BE}=60\Leftrightarrow\mathrm{BE}=4$$

$$\frac{6}{15}=\frac{8}{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow 6\cdot\Gamma\Delta=120\Leftrightarrow\Gamma\Delta=20.$$

16126.α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ έχουν:

- B κοινή
- $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Delta}$ γιατί $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\mathrm{B}} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ και $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Delta} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

Επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\mathrm{B}} \Leftrightarrow \frac{36}{\Gamma\Delta} = \frac{36}{24} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 24 .$$

16755α) $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{2\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} = 2$ και $\frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{2\Gamma\Delta}{\Gamma\Delta} = 2$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

- Γ κοινή και
- $\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Gamma\Delta} = 2$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε: $\mathrm{BA}\Gamma = \Gamma\Delta\mathrm{A}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα και $\mathrm{B} = \Delta\mathrm{A}\Gamma$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

21350.α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $\mathrm{AE}\Delta = \mathrm{B} = 90^\circ$ και κοινή τη γωνία Α. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}$ κοινή	$A\hat{E}\Delta = A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$	$A\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

Οπότε $\dfrac{\Delta E}{B\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{A\Gamma} = \dfrac{AE}{AB}$

γ) Είναι $\dfrac{\Delta E}{B\Gamma} = \dfrac{AE}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{4}{B\Gamma} = \dfrac{8}{12} \Leftrightarrow 8B\Gamma = 48 \Leftrightarrow B\Gamma = 6$.

21986.α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά
ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα.

Επομένως $\dfrac{A\Delta}{B\Delta} = \dfrac{AE}{\Gamma E} \Leftrightarrow \dfrac{1}{B\Delta} = \dfrac{AE}{\Gamma E} \Leftrightarrow \Gamma E = AE \cdot B\Delta$

β) i. Είναι $\Gamma E = AE \cdot B\Delta \Leftrightarrow 9 = B\Delta \cdot B\Delta \Leftrightarrow B\Delta^2 = 9 \Leftrightarrow B\Delta = 3$

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και
ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς
τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας των
τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{1}{4}$.

4ο Θέμα

14499.α) i.Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΑΜ έχουν:

1) $B\Delta E = BAM$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ//ΑΜ που τέμνονται από την ΑΒ και

2) τη γωνία Β κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή:

$\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}=\frac{B\Delta}{BA}$.

ii. Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΕΖ έχουν:

1) $\Gamma AM=\Gamma ZE$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΜ//ΕΖ που τέμνονται από την ΑΓ και
2) τη γωνία Γ κοινή.
Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή:

$\frac{ZE}{AM}=\frac{\Gamma E}{\Gamma M}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$.

β) Από το α) i. είναι $\frac{\Delta E}{AM}=\frac{BE}{BM}$ και από το α) ii. είναι $\frac{ZE}{AM}=\frac{\Gamma E}{\Gamma M}$, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{AM}+\frac{ZE}{AM}=\frac{BE}{BM}+\frac{\Gamma E}{\Gamma M}\overset{BM=\Gamma M}{\Leftrightarrow}\frac{\Delta E+ZE}{AM}=\frac{BE+\Gamma E}{BM}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta E+ZE}{AM}=\frac{\cancel{B\Gamma}}{\frac{\cancel{B\Gamma}}{2}}=2\Leftrightarrow \Delta E+ZE=2AM.$$

22102.i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $OAB=O\Gamma\Delta=90^\circ$ και έχουν την οξεία γωνία $\hat{O}$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνίας τους ίση. Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

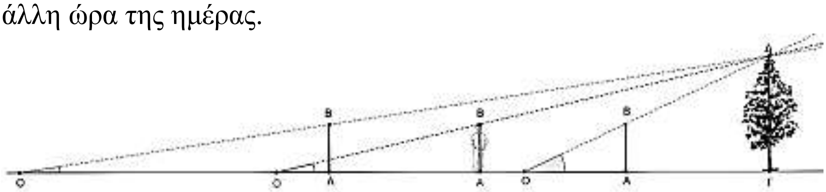
$$\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{OB}{O\Delta}=\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{2}{5}\ (1)$$

Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι $\lambda=\frac{1}{5}$.

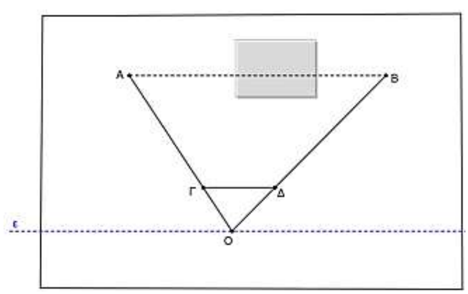
ii. Είναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{1,6}{\Gamma\Delta}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow 2\Gamma\Delta=8\Leftrightarrow \Gamma\Delta=4$

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά. Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν. Οι γωνίες Α και Γ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές. Το μέτρο της γωνίας Ο με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογωνίων τριγώνων με κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν. Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{ΟΒ}{ΟΔ}=\frac{ΟΑ}{ΟΓ}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου. Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.



22565.α) i. Είναι $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$, $\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ άρα $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}=\frac{1}{10}$, δηλαδή οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$, επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.



ii. Επειδή $\frac{ΟΓ}{ΟΑ}=\frac{ΟΔ}{ΟΒ}$ τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία Ο), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα
$\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}}=\frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}}=\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}\Rightarrow\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow \text{ΑΒ}=10\cdot\text{ΓΔ}$, επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

Μετρικές σχέσεις

Πυθαγόρειο Θεώρημα

2ο Θέμα

16805.α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε
$2AB + 2B\Gamma = 72 \Leftrightarrow 2(x+y) + 2z = 72 \Leftrightarrow x+y+z = 36$.
Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4$. Άρα
$x = 2\cdot 4 = 8,\ y = 4\cdot 4 = 16$ και $z = 3\cdot 4 = 12$.
β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε
$\Gamma E^2 = y^2 + z^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Leftrightarrow \Gamma E = 20$.
Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε
$\Delta E^2 = AE^2 + \Delta A^2 \Leftrightarrow \Delta E^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{208} = \sqrt{16\cdot 13} = 4\sqrt{13}$
Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με :
$\Delta E + E\Gamma + \Delta\Gamma = 4\sqrt{13} + 20 + (8+16) = 44 + 4\sqrt{13}$.

16757.α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 5$
β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν:

- $A\Delta\Gamma = E\Delta B$ (ως κατακορυφήν) και
- $A = E = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.
γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{E}$	$A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}B$	$A\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{B}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

Επομένως $\frac{A\Gamma}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} \Leftrightarrow \frac{3}{EB} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5EB = 6 \Leftrightarrow EB = \frac{6}{5}$.

17342.α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχει $\Gamma = 45^\circ$, οπότε από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε: $\mathrm{A\Gamma\Delta} + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma\Delta} = 45^\circ$, επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι ΓΔ = ΑΔ = 4.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, είναι:
$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\Gamma^2 = 4^2 + 4^2 = 2\cdot 4^2 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = 4\sqrt{2}$.

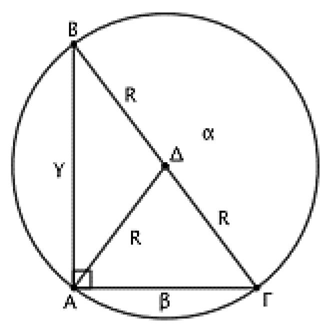
γ) Είναι $\mathrm{B\Delta} = \mathrm{B\Gamma} - \Delta\Gamma = 7 - 4 = 3$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ, είναι:
$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Delta\mathrm{B}^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Leftrightarrow \mathrm{AB} = 5$

21067.α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma} = 13$.

β) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:
$\mathrm{B\Delta}^2 = \Delta\Gamma^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27 \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

ii. Φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην ΔΓ, οπότε η προβολή του ΒΔ στην ΔΓ είναι η ΔΕ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι:
$\mathrm{B\Delta}^2 = \Delta\mathrm{E}\cdot\Delta\Gamma \Leftrightarrow 27 = \Delta\mathrm{E}\cdot 14 \Leftrightarrow \Delta\mathrm{E} = \dfrac{27}{14}$.

22130.α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αφού η εγγεγραμμένη γωνία Α είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα ΒΓ = α = 2R.



β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, οπότε
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2(2\mathrm{R})^2 = 8\mathrm{R}^2$.

22514.α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{AB}^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = 3$.

β) Είναι $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{B\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{B\Delta} = \dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{B\Gamma}} = \dfrac{16}{5}$.

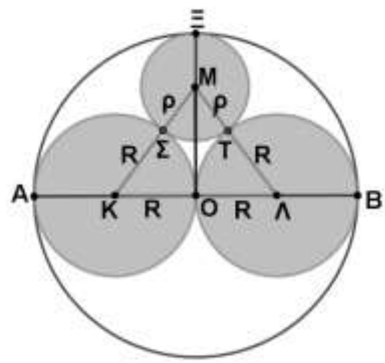
γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\mathrm{A\Delta}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{B\Delta}^2 = 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 16 - \frac{256}{25} = \frac{400-256}{25} = \frac{144}{24} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A\Delta} = \frac{12}{5}.$$

4ο Θέμα

14500.α) $1 \to \text{ii},\ 2 \to \text{iii},\ 3 \to \text{iv}$



β) Η διάκεντρος δύο εφαπτόμενων εξωτερικά κύκλων διέρχεται από το σημείο επαφής των 2 κύκλων και ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους, οπότε $\mathrm{KM} = \mathrm{K\Sigma} + \mathrm{\Sigma M} = \mathrm{R} + \rho$

και $\mathrm{\Lambda M} = \mathrm{\Lambda T} + \mathrm{TM} = \mathrm{R} + \rho$

Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές αφού ΚΜ=ΛΜ .

Το Ο είναι το μέσο της πλευράς ΚΛ, άρα η διάμεσος ΜΟ είναι και ύψος,

β) Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΚ έχουμε

$$\mathrm{KM}^2 = \mathrm{KO}^2 + \mathrm{MO}^2 \Leftrightarrow (\rho + \mathrm{R})^2 = \mathrm{R}^2 + (2\mathrm{R} - \rho)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\rho^2} + 2\mathrm{R}\cdot\rho + \cancel{\mathrm{R}^2} = \cancel{\mathrm{R}^2} + 4\mathrm{R}^2 - 4\mathrm{R}\cdot\rho + \cancel{\rho^2} \Leftrightarrow 6\cancel{\mathrm{R}}\cdot\rho = 4\mathrm{R}^{\cancel{2}} \Leftrightarrow \rho = \frac{2\mathrm{R}}{3}$$

16133.α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = 20$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ έχουμε:

$\mathrm{\Gamma E}^2 = \mathrm{\Delta E}^2 - \mathrm{\Delta\Gamma}^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow \mathrm{\Gamma E} = 6$.

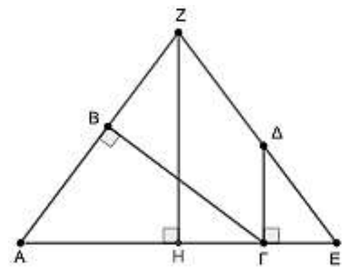
Είναι $\mathrm{AE} = \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma E} = 20 + 6 = 26$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ έχουν:

$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{12}{6} = 2$, $\quad \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \frac{16}{8} = 2$, $\quad \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Delta E}} = \frac{20}{10} = 2$, δηλαδή

$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Delta E}} = 2$, οπότε είναι όμοια, αφού έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) i) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια, θα έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, άρα $\mathrm{A} = \mathrm{E}$, οπότε το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΕ. Επειδή το ΖΗ είναι ύψος θα είναι και διάμεσος οπότε το σημείο Η είναι το μέσο της ΑΕ. Επομένως θα είναι



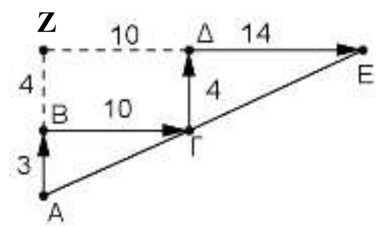
$\mathrm{HE} = \frac{\mathrm{AE}}{2} = \frac{26}{2} = 13$.

ii) Είναι ΔΓ//ΖΗ γιατί και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΕ, οπότε από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΓΔΕ θα έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΗΖΕ, δηλαδή:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\mathrm{ZH}} = \frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{HE}} \Leftrightarrow \frac{8}{\mathrm{ZH}} = \frac{6}{13} \Leftrightarrow 6\mathrm{ZH} = 104 \Leftrightarrow \mathrm{ZH} = \frac{104}{6} = \frac{52}{3}$$

14533.α) i.Το πρώτο κινητό έκανε τη διαδρομή $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \Gamma \to \Delta \to \mathrm{E}$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν:

$\mathrm{AB} + \mathrm{B}\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta\mathrm{E} =$
$3 + 10 + 4 + 14 = 31\mathrm{km}$.



Το δεύτερο κινητό έκανε τη διαδρομή $\mathrm{A} \to \mathrm{Z} \to \mathrm{E}$ οπότε η απόσταση που διένυσε ήταν: $\mathrm{AZ} + \mathrm{ZE} = 7 + 24 = 31\mathrm{km}$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΕ ($\hat{\mathrm{Z}} = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AZ}^2 + \mathrm{ZE}^2 = (3+4)^2 + (10+14)^2 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{AE}^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 \Leftrightarrow \mathrm{AE} = \sqrt{625} = 25.$$

β) Αν τα σημεία Α, Γ και Ε ήταν συνευθειακά θα πρέπει να ισχύει: ΑΓ+ΓΕ=ΑΕ .Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{B} = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

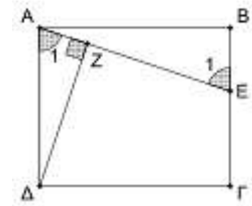
$$\mathrm{A}\Gamma^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B}\Gamma^2 = 3^2 + 10^2 = 9 + 100 = 109 \Leftrightarrow \mathrm{A}\Gamma = \sqrt{109}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ ($\Delta = 90^\circ$) από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $\mathrm{E}\Gamma^2 = \Delta\mathrm{E}^2 + \Delta\Gamma^2 = 14^2 + 4^2 = 196 + 16 = 212 \Leftrightarrow \mathrm{E}\Gamma = \sqrt{212}$

$\mathrm{A}\Gamma + \Gamma\mathrm{E} = \sqrt{109} + \sqrt{212} \neq 25$ αλλιώς θα είχαμε άρρητο ίσο με ρητό άτοπο.

Επομένως δεν διέρχονται από το σημείο Γ.

17348.α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε: $\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40 \Leftrightarrow \mathrm{AE} = 2\sqrt{10}$.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

• $A_1 = E_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ

• $B = Z = 90^\circ$ γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Επομένως ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta Z} = \frac{AE}{A\Delta} = \frac{BE}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2\sqrt{10}}{A\Delta} = \frac{2}{AZ}$ (1).

γ) Είναι $\frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AZ} \Leftrightarrow \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{AE - ZE} \overset{\Delta Z = ZE}{\Leftrightarrow} \frac{6}{\Delta Z} = \frac{2}{2\sqrt{10} - \Delta Z} \Leftrightarrow$

$12\sqrt{10} - 6\Delta Z = 2\Delta Z \Leftrightarrow 12\sqrt{10} = 8\Delta Z \Leftrightarrow \Delta Z = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. Τότε η σχέση (1)

γίνεται: $\frac{6}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{2\sqrt{10}}{A\Delta} \Leftrightarrow 6A\Delta = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot 2\sqrt{10} \Leftrightarrow 6A\Delta = 30 \Leftrightarrow A\Delta = 5$.

21149.α) i. Η γωνία ΒΓΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B A \Gamma = 30^\circ$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή $B\Gamma = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{2R}{2} \Leftrightarrow R = 2$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 = 12 + 6^2 = 48 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ. Είναι $\Delta B^2 = 8^2 = 64$ και $AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + 48 = 64$.

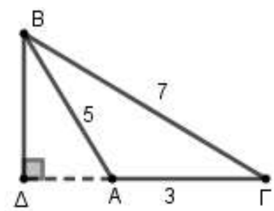
Επειδή $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$ το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $BA\Delta = 90^\circ$, επομένως το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος
2ο Θέμα

14549.α) Είναι $\alpha^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 9 + 25 = 34$.

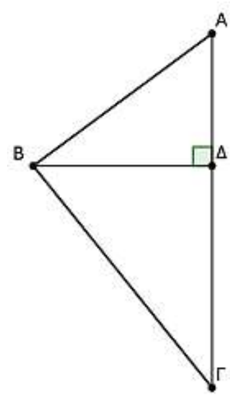
Είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Φέρνουμε κάθετη από το Β προς την ΑΓ. Το σημείο τομής Δ της κάθετης και της ΑΓ είναι η προβολή του Β στην ΑΓ, οπότε η ΑΔ είναι η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ.
Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:



$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 + 6A\Delta \Leftrightarrow 49 - 34 = 6A\Delta \Leftrightarrow$$
$$6A\Delta = 15 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

16080.α) Φέρουμε το ύψος ΒΔ. Η προβολή της ΑΒ στην ΑΓ είναι η ΑΔ. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα για την οξεία γωνία Α, έχουμε:



$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{41}\right)^2 = 5^2 + 8^2 + 16A\Delta \Leftrightarrow$$
$$16A\Delta = 48 \Leftrightarrow A\Delta = 3.$$

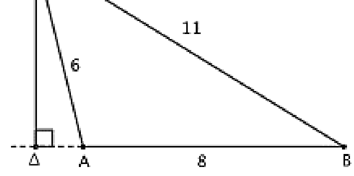
β) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 = B\Delta^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow$$
$$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4.$$

16101.α) Είναι $B\Gamma^2 = 11^2 = 121$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$,

άρα $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, οπότε $A > 90^\circ$ άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) Έστω Δ η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην ΑΒ. Τότε, η προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ είναι το τμήμα ΑΔ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα:



Επειδή η γωνία Α είναι αμβλεία, από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta} \Leftrightarrow 121 = 64 + 36 + 16\mathrm{A\Delta} \Leftrightarrow$$

$$21 = 16\mathrm{A\Delta} \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta} = \frac{21}{16}.$$

16804.α) i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα ΘΓ

ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ΒΗ

iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς ΑΓ στην πλευρά ΒΓ

iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ

v. $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}2 - 2\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{BH}$

vi. $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Theta}$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{A\Theta} \Leftrightarrow$$

$$25 = 16 + 36 - 2\cdot 6\cdot\mathrm{A\Theta} \Leftrightarrow 12\mathrm{A\Theta} = 27 \Leftrightarrow \mathrm{A\Theta} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

17343.α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{A\Delta}^2 + \Gamma\Delta^2 - 2\mathrm{A\Delta}\cdot\Gamma\Delta\cdot\text{συν}\Delta = 25 + 9 - 30\text{συν}120^\circ \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = 34 - 30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 = 49 \Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma} = 7.$$

β) Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\text{συν}\omega \Leftrightarrow 8^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\text{συν}\omega \Leftrightarrow$$

$$64 = 74 - 70\text{συν}\omega \Leftrightarrow 70\text{συν}\omega = 10 \Leftrightarrow \text{συν}\omega = \frac{1}{7}.$$

17354.α) i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ΚΕ .

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα ΚΖ .

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ.

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ΕΖ στην πλευρά ΔΕ .

v. $\Delta\mathrm{Z}^2 = \Delta\mathrm{E}^2 + \mathrm{EZ}^2 + 2\mathrm{EZ}\cdot\mathrm{KE}$

vi. $\mathrm{EZ}^2 = \Delta\mathrm{E}^2 + \Delta\mathrm{Z}^2 - 2\Delta\mathrm{E}\cdot\Delta\mathrm{I}$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΕΖ έχουμε:

$$\text{ΕΖ}^2 = \text{ΔΕ}^2 + \text{ΔΖ}^2 - 2\text{ΔΕ}\cdot\text{ΔΙ} \Leftrightarrow 4^2 = 2^2 + 5^2 - 2\cdot 2\cdot \text{ΔΙ} \Leftrightarrow$$

$$16 = 29 - 4\text{ΔΙ} \Leftrightarrow 4\text{ΔΙ} = 13 \Leftrightarrow \text{ΔΙ} = \frac{13}{4}.$$

21302.α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε: $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΔ}^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = 4$.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2 = 4^2 + 8 = 16 + 64 = 80 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

γ) Είναι $\text{ΒΓ}^2 = (3+8)^2 = 11^2 = 121$ και

$$\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 5^2 + \left(\sqrt{80}\right)^2 = 25 + 80 = 105.$$

Είναι $\text{ΒΓ}^2 > \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 \Leftrightarrow \text{Α} > 90^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

22248.α) Είναι $\text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = \text{ΒΓ}^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\text{Α} = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

β) i. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε, δ και ΑΒ που τέμνουν τις ΓΑ και ΓΒ ισχύει η αναλογία

$$\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΓΕ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΓΑ}} \Leftrightarrow \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΓΕ}} = \frac{\text{ΔΒ}}{4} = \frac{15}{12} \Rightarrow \frac{\text{ΔΒ}}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \text{ΔΒ} = 5.$$

ii. Είναι ΓΔ = ΓΒ – ΔΒ = 15 – 5 = 10 και ΓΕ = ΓΑ – ΕΑ = 12 – 4 = 8.
Το τρίγωνο ΔΕΓ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΓΑ και ΓΒ του τριγώνου ΑΒΓ και την ευθεία ε που είναι παράλληλη στην πλευρά του ΑΒ, οπότε έχει πλευρές ανάλογες στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΓΒ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}} = \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΑΒ}} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{\text{ΕΔ}}{9} \Rightarrow \frac{\text{ΕΔ}}{9} = \frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{15}^{\,3}} \Leftrightarrow 3\text{ΕΔ} = 18 \Leftrightarrow \text{ΕΔ} = 6.$$

22512.α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 - 2\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{συνΓ} \Leftrightarrow$$

$$\text{ΑΒ}^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 4 + 16 - 8 = 12 \Leftrightarrow \text{ΑΒ} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

β) $AB^2 + A\Gamma^2 = 12 + 4 = 16 = 4^2 = B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

Είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$.

4ο Θέμα

21185.α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:
$\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3}$.

Έστω ότι $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{4} = \frac{\gamma}{3} = \lambda > 0$, τότε α = 5λ, β = 4λ και γ = 3λ.

Είναι $\beta^2 + \gamma^2 = (4\lambda)^2 + (3\lambda)^2 = 16\lambda^2 + 9\lambda^2 = 25\lambda^2 = (5\lambda)^2 = \alpha^2$, οπότε τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\lambda\% = \frac{\lambda}{100}$, λ > 0, τότε προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:
$\frac{\lambda}{100}\alpha$, $\frac{\lambda}{100}\beta$ και $\frac{\lambda}{100}\gamma$.

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$\left(\frac{\lambda}{100}\beta\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{100}\gamma\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \beta^2 + \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \gamma^2 =$$

$$\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \left(\beta^2 + \gamma^2\right) = \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 \alpha^2 = \left(\frac{\lambda}{100}\alpha\right)^2.$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha < 8\beta + 6\gamma \Leftrightarrow 10 \cdot 5\lambda < 8 \cdot 4\lambda + 6 \cdot 3\lambda \Leftrightarrow 50\lambda < 32\lambda + 18\lambda \Leftrightarrow 50\lambda < 50\lambda$$

άτοπο.

Άρα δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

22400.α) i. Είναι $AB^2 + A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2 = B\Gamma^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$ και υποτείνουσα την πλευρά ΓΒ.

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$\Delta E^2 = A\Delta^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow \Delta E = 5$.

β) i. Είναι $AB^2 + A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \neq 10^2 = B\Gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

ii. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{AB^2 + A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{2AB \cdot A\Gamma} = \frac{225 - 100}{2 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{125}{216}.$$

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta E^2 = A\Delta^2 + AE^2 - 2A\Delta \cdot AE \cdot \sigma\upsilon\nu A = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{125}{216} \Leftrightarrow$$

$$\Delta E^2 = 25 - \frac{125}{9} = \frac{225 - 125}{9} = \frac{100}{9} \Leftrightarrow \Delta E = \frac{10}{3}.$$

21102.α) i. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2}$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$$AE^2 = A\Delta^2 + \Delta E^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow AE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

β) Η προβολή του ΑΕ στην ΑΓ είναι το τμήμα ΑΖ. Η γωνία $\hat{ZAE}$ είναι οξεία γωνία επειδή οι πλευρές της περιέχονται στην ορθή γωνία $\hat{BA\Delta}$ του τετραγώνου.

Εφαρμόζουμε το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΕΓ:

$$E\Gamma^2 = AE^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma \cdot AZ \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \alpha\sqrt{2} \cdot AZ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} + 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2} \cdot AZ \Leftrightarrow \alpha^2 = 5\alpha^2 + 8\alpha^2 - 8\alpha\sqrt{2} \cdot AZ \Leftrightarrow$$

$$8\alpha\sqrt{2} \cdot AZ = 12\alpha^2 \Leftrightarrow AZ = \frac{12\alpha^2}{8\alpha\sqrt{2}} = \frac{3\alpha\sqrt{2}}{4}.$$

Εμβαδά

Εμβαδά βασικών σχημάτων

2ο Θέμα

16102.α) Τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ είναι ίσα διότι έχουν:
- ΔΟ=ΒΟ (το Ο είναι μέσο της ΔΒ)
- $\mathrm{Z\Delta O} = \mathrm{EBO}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνόμενων από τη ΒΔ)
- $\mathrm{\Delta OZ} = \mathrm{BOE}$ (ως κατακορυφήν)

Επομένως, τα τρίγωνα ΔΟΖ και ΒΟΕ θα είναι και ισοδύναμα, δηλαδή (ΔΟΖ) = (ΒΟΕ).
β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΓΒΔ είναι ίσα, οπότε έχουν και το ίδιο εμβαδό, δηλαδή (ΑΔΒ) = (ΓΒΔ)
Από το σχήμα έχουμε ότι
(ΑΔΒ) = (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) και (ΓΒΔ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ)
Οπότε, είναι: (ΔΟΕΑ) + (ΒΟΕ) = (ΒΓΖΟ) + (ΔΟΖ)
Αφού (ΒΟΕ) = (ΔΟΖ), τότε είναι (ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ).

16817.α) Είναι $\left(\mathrm{BE\Delta}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{\Delta E} \cdot \mathrm{B\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \alpha = \alpha$ και $\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta}\right) = \alpha^2$, οπότε:

$$\left(\mathrm{BE\Delta}\right) = \frac{\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta}\right)}{8} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha^2}{8} \Leftrightarrow 8\alpha = \alpha^2 \Leftrightarrow 8\alpha - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(8-\alpha\right) = 0 \Leftrightarrow$$

α = 0 απορρίπτεται ή $\alpha = 8$.
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\mathrm{BE}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \mathrm{E\Gamma}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow \mathrm{BE} = 10$$

18550.α) Επειδή η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 36, έχουμε:

$$36 = 2\mathrm{AB} + 2\mathrm{B\Gamma} = 2z + 2x + 2y \Leftrightarrow x + y + z = 18 \ (1)$$

Επειδή τα μήκη x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, ισχύει ότι $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$.

Όμως $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} \overset{(1)}{=} \frac{18}{9} = 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \\ \frac{y}{4} = 2 \Leftrightarrow y = 8 \\ \frac{z}{3} = 2 \Leftrightarrow z = 6 \end{cases}.$$

β) i. Είναι

$$(\Gamma E\Delta) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Delta E) - (EB\Gamma) = AB \cdot B\Gamma - \frac{1}{2}AE \cdot A\Delta - \frac{1}{2}EB \cdot B\Gamma \Leftrightarrow$$

$$(\Gamma E\Delta) = 12 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 72 - 12 - 24 = 36.$$

ii. $\frac{(\Gamma E\Delta)}{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$.

18559.α) Το τμήμα ΒΕ είναι το μισό της πλευράς ΒΓ, αφού η ΑΕ είναι διάμεσος στην πλευρά ΒΓ, άρα ΕΓ=5. Στο τρίγωνο ΑΓΕ μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΓΕ, οπότε

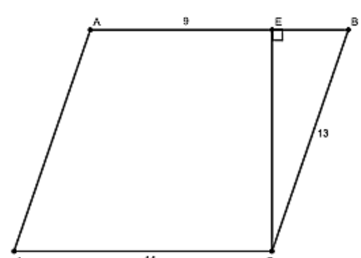
$E\Gamma^2 = AE^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16$ ισχύει, άρα το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο με $E\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, οπότε $AE \perp A\Gamma$.

β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα,
άρα (ΑΒΕ) = (ΑΓΕ)

ii. Είναι $(A\Gamma E) = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$, οπότε

$$(AB\Gamma) = (A\Gamma E) + (AEB) = 2(A\Gamma E) = 12.$$

18560.α) Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ=13 και ΓΔ=14. Φέρουμε ΓΕ⊥ΑΒ.
ΑΒ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το τμήμα ΒΕ έχουμε:
$BE = AB - AE = 14 - 9 = 5.$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

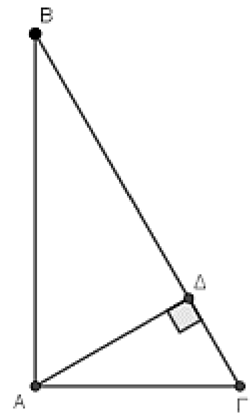
$$\Gamma E^2 = \Gamma B^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \Gamma E = 12.$$

β) i. Το μήκος ΓΕ είναι η απόσταση των απέναντι πλευρών ΑΒ και ΓΔ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Άρα $\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)=\text{Α Β}\cdot\text{Γ Ε}=14\cdot 12=168$ τ.μ.

ii. Το τραπέζιο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο και οι βάσεις του είναι οι ΑΕ και ΓΔ. Άρα

$$\left(\text{ΑΕΓΔ}\right)=\frac{\left(\text{ΑΕ}+\text{ΓΔ}\right)\cdot\text{ΓΕ}}{2}=\frac{\left(9+14\right)\cdot 12}{2}=23\cdot 6=138\text{ τ.μ.}$$

21101.α) Είναι $\text{ΒΓ}^2=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ και



$\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2=2+1=3$, δηλαδή $\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2=\text{ΒΓ}^2$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\text{Α}=90^\circ$.

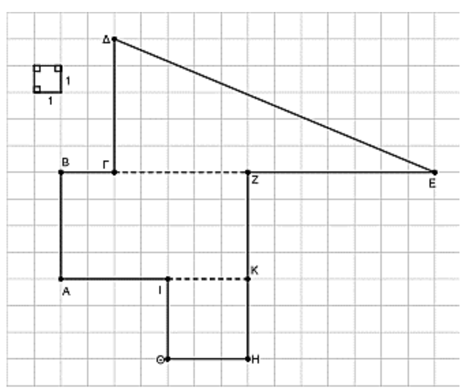
β) $\left(\text{ΑΒΓ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να δοθεί και από τον τύπο

$\left(\text{ΑΒΓ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΔ}$, άρα

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\text{ΑΔ}\Leftrightarrow\text{ΑΔ}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

18558.α) Φέρουμε το τμήμα ΓΖ, το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο με ΔΓ= 5 και ΓΕ=12. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημά έχουμε:



$\text{ΔΕ}^2=\text{ΔΓ}^2+\text{ΓΕ}^2\Leftrightarrow$

$\text{ΔΕ}^2=5^2+12^2=169\Leftrightarrow$

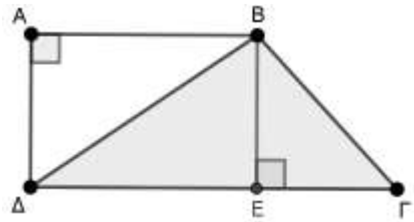
$\text{ΔΕ}=13$.

β) Το χωρίο αποτελείται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ, το ορθογώνιο ΒΖΚΑ και το τετράγωνο ΚΗΘΙ. Υπολογίζουμε τα εμβαδά τους ξεχωριστά.

$\left(\text{ΔΓΕ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΓΕ}\cdot\text{ΔΓ}=\frac{1}{2}12\cdot 5=30,\left(\text{ΒΖΚΑ}\right)=\text{ΒΖ}\cdot\text{ΑΒ}=7\cdot 4=28$ και

$(\text{ΚΗΘΙ}) = 3^2 = 9$.

Είναι $(\text{ΑΒΓΔΕΖΗΘΙ}) = (\text{ΔΓΕ}) + (\text{ΒΖΚΑ}) + (\text{ΚΗΘΙ}) = 30 + 28 + 9 = 67$.



21823.α) Το ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο (έχει τρείς γωνίες ορθές), οπότε ΒΕ = ΑΔ = 4 και ΔΕ = ΑΒ = 5. Άρα η ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 8 – 5 = 3.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΒΕ}^2 + \text{ΕΓ}^2 \Leftrightarrow$

$\text{ΒΓ}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = 5$.

γ) Είναι $(\text{ΒΔΓ}) = \dfrac{1}{2}\text{ΔΓ} \cdot \text{ΒΕ} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ και

$(\text{ΑΒΓΔ}) = \dfrac{(\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ}) \cdot \text{ΑΔ}}{2} = \dfrac{(5+8) \cdot 4}{2} = 26$, άρα

$\dfrac{(\text{ΒΔΓ})}{(\text{ΑΒΓΔ})} = \dfrac{16}{26} = \dfrac{8}{13}$.

16821.α) Είναι $(\text{ΑΖΕ}) = \dfrac{1}{2}\text{ΑΖ} \cdot \text{ΑΕ} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{5}\text{ΑΔ} \cdot \dfrac{3}{5}\text{ΑΒ} = \dfrac{6}{25}\alpha^2$.

β) Είναι $(\text{ΕΒΓΔΖ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) - (\text{ΑΕΖ}) \Leftrightarrow$

$76 = \alpha^2 - \dfrac{6}{25}\alpha^2 \Leftrightarrow 76 = \left(1 - \dfrac{6}{25}\right)\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{25}{25} - \dfrac{6}{25}\right)\alpha^2 = 76 \Leftrightarrow \dfrac{19}{25}\alpha^2 = 76 \Leftrightarrow \alpha^2 = \dfrac{25 \cdot \cancel{76}^{4}}{\cancel{9}} = 100 \Leftrightarrow \alpha = 10$.

22032.α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν κοινή βάση την ΑΔ και ύψη ίσα με την απόσταση των παράλληλων ευθειών ΑΒ και ΑΔ και ΒΓ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ίσα ύψη και κοινή βάση, είναι ισεμβαδικά.

β) Είναι (ΑΒΕ) = (ΑΒΔ) – (ΑΕΔ) και (ΔΓΕ) = (ΑΓΔ) – (ΑΕΔ). Επειδή (ΑΒΔ) = (ΑΓΔ) είναι και (ΑΒΕ) = (ΔΓΕ) .

22035.α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΒΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = 80^2 + 60^2 = 6400 + 3600 = 10.000 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = 100$.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές και έχει μια γωνία του 60°, είναι ισόπλευρο.

γ) Είναι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΒΓ=\frac{1}{2}\cdot 60\cdot 80=2400\text{m}^2$ και

$(ΑΔΓ)=\frac{α^2\sqrt{3}}{4}=\frac{100^2\sqrt{3}}{4}=2500\sqrt{3}\text{m}^2$, άρα

$(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΔΓ)=\left(2400+2500\sqrt{3}\right)\text{m}^2$.

22331.α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ έχουμε:

$ΑΗ^2=ΑΒ^2-ΒΗ^2=20^2-12^2=400-144=256=16^2 \Leftrightarrow ΑΗ=16$.

β) Είναι $(ΑΒΔ)=24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ΑΔ\cdot ΒΗ=24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ΑΔ\cdot 12=24 \Leftrightarrow$

$6ΑΔ=24 \Leftrightarrow ΑΔ=4$.

γ) Είναι $ΔΗ=ΑΗ-ΑΔ=16-4=12$, οπότε

$(ΓΔΗ)=\frac{1}{2}ΗΓ\cdot ΗΔ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30$.

22338.α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ το ΑΚ είναι το ύψος του, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΔΓ και οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΔ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΔΓ είναι αντίστοιχα ΚΔ=9 και ΚΓ=16.

Άρα $ΑΚ^2=ΚΔ\cdot ΚΓ=9\cdot 16=144=12^2 \Leftrightarrow ΑΚ=12$.

β) $(ΑΒΓΔ)=\frac{(ΔΓ+ΑΒ)\cdot ΑΚ}{2}=\frac{(25+16)\cdot 12}{2}=246$.

22339.α) i) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $ΑΒ^2=ΔΒ\cdot ΒΓ \Leftrightarrow 15^2=9ΒΓ \Leftrightarrow ΒΓ=\frac{225}{9}=25$.

ii) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΑΓ^2=ΒΓ^2-ΑΒ^2=25^2+15^2=625-225=400 \Leftrightarrow ΑΓ=20$

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, το εμβαδόν του είναι

$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΑΓ=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$.

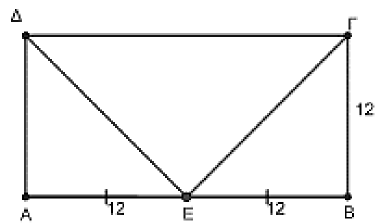
22513.α) Είναι $A\Gamma^2+AB^2=5^2+12^2=25+144=169=13^2=B\Gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με

$A=90^\circ$.

β) Είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12=30$, όμως

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow 30=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha=\frac{60}{13}$.

4ο Θέμα



16807.α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΕ είναι ορθογώνια με καθεμιά από τις κάθετες πλευρές τους 12. Οπότε είναι ίσα και ισχύει ΓΕ = ΔΕ.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει

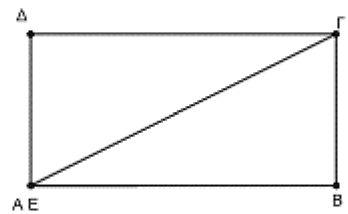
$\Gamma E^2=\Delta E^2=12^2+12^2=2\cdot 12^2 \Leftrightarrow$

$\Gamma E=\Delta E=12\sqrt{2}$.

Η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ είναι ίση με

$24+12\sqrt{2}+12\sqrt{2}=24+2412\sqrt{2}=24\left(1+\sqrt{2}\right)$.

$(\Gamma E\Delta)=\frac{1}{2}\Delta\Gamma\cdot B\Gamma=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 12=144$.



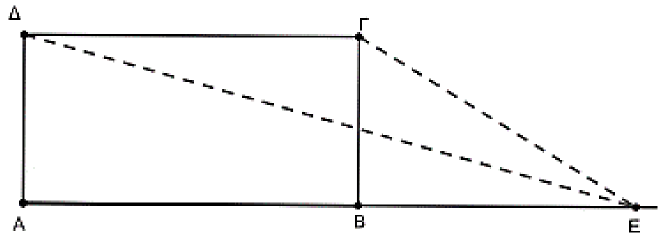
ii. Αν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α του ορθογωνίου τότε το τρίγωνο ΓΕΔ ταυτίζεται με το τρίγωνο ΓΑΔ. Οπότε η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με ΓΑ + ΑΔ + ΔΓ (1).
Για την πλευρά ΓΑ που είναι υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε

$\Gamma A^2=AB^2+B\Gamma^2=24^2+12^2 \Leftrightarrow$

$\Gamma A^2=(2\cdot 12)^2+12^2=4\cdot 12^2+12^2=5\cdot 12^2 \Leftrightarrow \Gamma A=12\sqrt{5}$.

Το εμβαδό του τριγώνου όταν το σημείο Ε ταυτιστεί με την κορυφή Α ισούται με το εμβαδό του τριγώνου ΓΑΔ που είναι ίσο με $\frac{\Delta\Gamma\cdot A\Delta}{2}=144$.

β)



i. Αν το σημείο Ε κινηθεί πάνω στη ευθεία ΑΒ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΔΓ τότε η πλευρά ΔΓ παραμένει σταθερή αλλά οι δυο άλλες πλευρές του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται. Αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση της ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β, τα πλάγια τμήματα ΓΕ και ΔΕ συνεχώς μεγαλώνουν, αφού το ίχνος τους Ε απέχει ολοένα και περισσότερο από τα ίχνη Β και Α των κάθετων τμημάτων ΓΒ και ΔΑ αντίστοιχα. Οπότε η περίμετρος η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλεται και συνεχώς αυξάνεται.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ, θα πάρουμε ως βάση τη σταθερή πλευρά του ΔΓ, οπότε το ύψος του προς τη ΔΓ ισούται με την απόσταση των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που είναι σταθερή και ίση με 12. Το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ σε οποιαδήποτε θέση της κορυφής Ε πάνω στην ευθεία ΑΒ είναι ίσο με : $\frac{24 \cdot 12}{2} = 144$.

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι: (ΑΒΓΔ) = 24 · 12 = 288, άρα $(\text{ΓΕΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.

Συμπερασματικά αν το σημείο Ε κινείται στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β απομακρυνόμενο από το σημείο Β, οι πλευρές ΓΕ και ΔΕ του τριγώνου ΓΕΔ μεταβάλλονται, η περίμετρος μεταβάλλεται (αυξάνεται) όπως έχει προκύψει στο βi) αλλά το εμβαδό του τριγώνου μένει σταθερό και ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου.

16135.α) i. Είναι ΔΒ = 2 οπότε ΔΓ = ΒΓ – ΔΒ = 8. Όμως σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. Επομένως

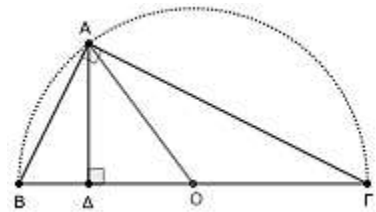
$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΔΒ} \cdot \text{ΔΓ} = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = 4$.

ii. $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΔ} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$

β) i. Καθώς το σημείο Α κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την ΒΓ, η βάση του τριγώνου ΒΓ παραμένει σταθερή και ίση με 10, ενώ το αντίστοιχο ύψος ΑΔ μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το εμβαδόν του τριγώνου , το οποίο θα είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{A\Delta}=\frac{1}{2}\cdot 10\mathrm{A\Delta}=5\mathrm{A\Delta}.$$

ii. Έστω Ο το κέντρο του κύκλου με διάμετρο τη ΒΓ.
Είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ =5.
Αν το Δ δεν ταυτίζεται με το Ο τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ είναι
$\mathrm{A\Delta} < \mathrm{AO} \Leftrightarrow \mathrm{A\Delta} < 5 \Leftrightarrow$
$5\mathrm{A\Delta} < 25 \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Gamma}) < 25$.



Αν το Δ ταυτίζεται με το Ο τότε ΑΔ=ΟΑ=5 και
$5\mathrm{A\Delta}=25 \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Gamma})=25$.

Επομένως σε κάθε περίπτωση $(\mathrm{AB\Gamma})\le 25$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής.

17349.α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι : $\mathrm{BE}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2=3^2+\left(4-\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow$

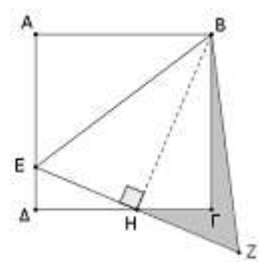
$$\mathrm{BE}^2=9+16-8\sqrt{3}+3=28-8\sqrt{3}=4\left(7-2\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow \mathrm{BE}=2\sqrt{7-2\sqrt{3}}\ (1).$$

β) Είναι $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AE}=3-4+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$.
Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΗ έχουμε ότι : $\mathrm{EH}^2=\mathrm{E\Delta}^2+\Delta\mathrm{H}^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\mathrm{EH}^2=3-2\sqrt{3}+1+3=7-2\sqrt{3}\Leftrightarrow \mathrm{EH}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}\ (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\mathrm{EH}=\frac{\mathrm{EB}}{2}$. Όμως ΕΒ=ΕΖ γιατί το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισόπλευρο, άρα $\mathrm{EH}=\frac{\mathrm{EZ}}{2}$, οπότε το Η είναι μέσο του ΕΖ.

γ) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΒΓΗ από το τρίγωνο ΒΖΗ, δηλαδή (ΒΖΗ) − (ΒΓΗ).
Άρα $(\mathrm{BZH})-(\mathrm{B\Gamma H})=\frac{\mathrm{BE}^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{BH}\Leftrightarrow$



$$\left(\text{ΒΖΗ}\right)-\left(\text{ΒΓΗ}\right)=\frac{4\left(7-2\sqrt{3}\right)}{4}-\frac{1}{2}3\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)=...=\frac{10\sqrt{3}-15}{2}.$$

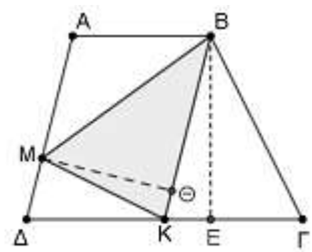
18173.α) Επειδή ΓΔ = 2ΑΒ και Κ μέσο της ΓΔ, θα έχουμε ΑΒ =//ΔΚ, οπότε το ΑΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο και ΒΚ=//ΑΔ.

i. Φέρουμε την ΒΕ κάθετη στην ΓΔ. Τότε το ΒΕ είναι ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΒΚΓ αλλά και του παραλληλογράμμου ΑΒΚΔ.

(ΑΒΚΔ) = ΔΚ·ΒΕ και $\left(\text{ΒΚΓ}\right)=\frac{\text{ΚΓ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}$. Όμως επειδή το Κ είναι μέσο της ΔΓ, έχουμε ΔΚ = ΚΓ.

Έτσι έχουμε $\left(\text{ΒΚΓ}\right)=\frac{\text{ΔΚ}\cdot\text{ΒΕ}}{2}=\frac{\left(\text{ΑΒΚΔ}\right)}{2}$.

ii. Φέρουμε το ύψος ΜΘ του τριγώνου ΒΜΚ.



Είναι $\left(\text{ΒΜΚ}\right)=\frac{\text{ΒΚ}\cdot\text{ΜΘ}}{2}=\frac{\left(\text{ΑΒΚΔ}\right)}{2}$,άρα (ΒΚΓ) = (ΒΜΚ).

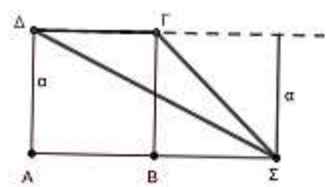
β) Από το α.ii) έχουμε ότι 2(ΒΜΚ) = (ΑΒΚΔ) και (ΒΜΚ) = (ΒΚΓ).

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

3(ΒΜΚ)= (ΑΒΚΔ) + (ΒΚΓ) = (ΑΒΓΔ), δηλαδή $\frac{\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)}{\left(\text{ΒΜΚ}\right)}=3$.Άρα, η πρόταση είναι σωστή.

Ο λόγος των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με 3.

18553.α) i. Για να υπολογίσουμε το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε ως βάση την πλευρά ΔΓ, οπότε το ύψος είναι η απόσταση της κορυφής Σ από την ευθεία ΔΓ που είναι ίση με α.

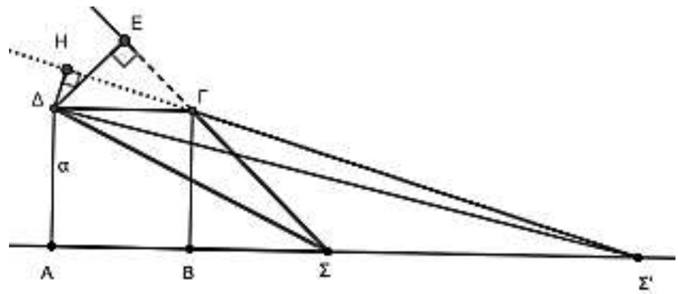


Άρα $\left(\text{ΣΔΓ}\right)=\frac{1}{2}\alpha\cdot\alpha=\frac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε:

$$\text{ΣΓ}^2=\text{ΣΒ}^2+\text{ΒΓ}^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2\Leftrightarrow\text{ΣΓ}=\alpha\sqrt{2}$$

β)



i. Τα τρίγωνα Σ΄ΔΓ και ΣΔΓ έχουν κοινή βάση τη ΔΓ και ύψος ίσο με την απόσταση των παραλλήλων πλευρών ΑΒ και ΔΓ, αφού οι κορυφές τους Σ και Σ΄ βρίσκονται στην ευθεία ΑΒ // ΔΓ. Οπότε τα τρίγωνα αυτά έχουν και ίσα εμβαδά. $\left(\Sigma'\Delta\Gamma\right)=\left(\Sigma\Delta\Gamma\right)=\dfrac{\alpha^2}{2}$.

ii. Από το σημείο Γ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΒ προς την ευθεία ΑΒ και τα πλάγια ΓΣ και ΓΣ΄.

Τα ίχνη Σ και Σ΄ των πλάγιων τμημάτων ΓΣ και ΓΣ΄ αντίστοιχα είναι τέτοια ώστε οι αποστάσεις τους από το ίχνος Β του κάθετου ΓΒ να είναι άνισες και συγκεκριμένα ΒΣ΄ > ΒΣ, οπότε και τα αντίστοιχα πλάγια είναι ομοίως άνισα δηλαδή ΓΣ΄ > ΓΣ.

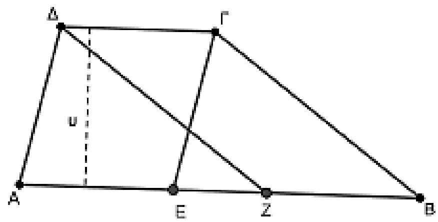
iii. Η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΕ και η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ’Γ είναι ίση με το μήκος του τμήματος ΔΗ.

Είναι $\left(\Sigma'\Delta\Gamma\right)=\dfrac{1}{2}\Sigma'\Gamma\cdot\Delta\mathrm{H}$ και $\left(\Sigma\Delta\Gamma\right)=\dfrac{1}{2}\Sigma\Gamma\cdot\Delta\mathrm{E}$, οπότε:

$$\left(\Sigma'\Delta\Gamma\right)=\left(\Sigma\Delta\Gamma\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\Sigma'\Gamma\cdot\Delta\mathrm{H}=\frac{1}{2}\Sigma\Gamma\cdot\Delta\mathrm{E}\Leftrightarrow$$

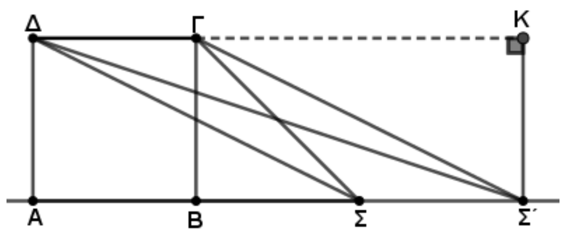
$$\Sigma'\Gamma\cdot\Delta\mathrm{H}=\Sigma\Gamma\cdot\Delta\mathrm{E}\Leftrightarrow\frac{\Sigma'\Gamma}{\Sigma\Gamma}=\frac{\Delta\mathrm{E}}{\Delta\mathrm{H}}$$ και επειδή

Σ΄Γ > ΣΓ θα έχουμε ΔΕ > ΔΗ. Δηλαδή η απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία Σ΄Γ είναι μικρότερη από την απόσταση του σημείου Δ από την ευθεία ΣΓ.



18557.α) Τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν τις απέναντι πλευρές τους ανά δύο παράλληλες, άρα είναι παραλληλόγραμμα.
Για τα εμβαδά τους έχουμε :
(ΑΔΓΕ) = ΔΓ · υ (1), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου ή αλλιώς η απόσταση των βάσεων του.
(ΒΓΔΖ) = ΔΓ · υ (2), όπου υ είναι το ύψος του τραπεζίου. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ είναι ισεμβαδικά.
β) Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει περίμετρο
$Π_1$ = ΑΔ + ΔΓ + ΓΕ + ΕΑ, αλλά οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες αφού είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $Π_1$ = 2 · ΑΔ + 2 · ΔΓ.
Το τετράπλευρο ΒΓΔΖ είναι επίσης παραλληλόγραμμο οπότε έχει περίμετρο
$Π_2$ = ΒΓ + ΔΓ + ΔΖ + ΖΒ = 2 · ΒΓ + 2 · ΔΓ
γ) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τετράπλευρα ΑΔΓΕ και ΒΓΔΖ έχουν ίσα εμβαδά ανεξάρτητα από τη μορφή που έχει το αρχικό τραπέζιο. Για να έχουν και ίσες περιμέτρους θα πρέπει ΑΔ = ΒΓ, δηλαδή το αρχικό τραπέζιο να έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, οπότε το τραπέζιο ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές.

18555.

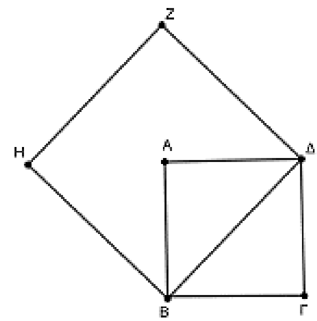


α) i) $(ΣΔΓ)=\frac{1}{2}ΓΔ\cdot ΓΒ=\frac{1}{2}α^2$**.**

ii) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στα τρίγωνα ΓΒΣ και ΑΔΣ έχουμε αντίστοιχα: $ΓΣ^2=ΓΒ^2+ΒΣ^2=α^2+α^2=2α^2 \Leftrightarrow ΓΣ=α\sqrt{2}$,
$ΔΣ^2=ΑΔ^2+ΑΣ^2=α^2+4α^2=5α^2 \Leftrightarrow ΔΣ=α\sqrt{5}$.
Το τρίγωνο ΣΔΓ έχει περίμετρο $Π=ΣΔ+ΔΓ+ΓΣ=α\sqrt{5}+α+α\sqrt{2}$.

β)i) Είναι $\Sigma'K = B\Gamma$ (απέναντι πλευρές του ορθογώνιου ΒΓΚΣ΄ οπότε: $(\Sigma'\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot \Sigma'K = \frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 = (\Sigma\Delta\Gamma)$ άρα δεν ισχύει ο ισχυρισμός του Βρασίδα.

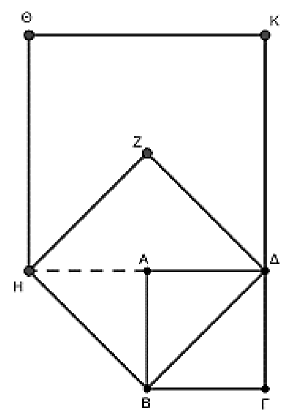
ii) Το τρίγωνο Σ΄ΔΓ έχει περίμετρο $\Pi' = \Sigma'\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma\Sigma' > \Sigma\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma\Sigma = \Pi$ άρα ισχύει ο ισχυρισμός του Βρασίδα.



18562.α) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:
$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow$
$B\Delta = \alpha\sqrt{2}$.
Για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, έχουμε:
$(AB\Gamma\Delta) = \alpha^2$.

β) i. Τα τμήματα ΔΑ και ΒΑ είναι κάθετα μεταξύ τους ως πλευρές του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. Είναι $B\Delta A = 45^\circ$ και $BZ\Delta = 90^\circ$, άρα $A\Delta Z = 45^\circ$. Δηλαδή το τμήμα ΔΑ διχοτομεί τη γωνία Δ του τετραγώνου, άρα το ΔΑ ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.
Ομοίως η ΒΑ διχοτομεί τη γωνία Β του τετραγώνου ΒΔΖΗ και το ΒΑ ανήκει στην άλλη διαγώνιο του.
Οι δύο διαγώνιες του τετραγώνου ΒΔΖΗ τέμνονται στο σημείο Α, δηλαδή το Α είναι το κέντρο του.

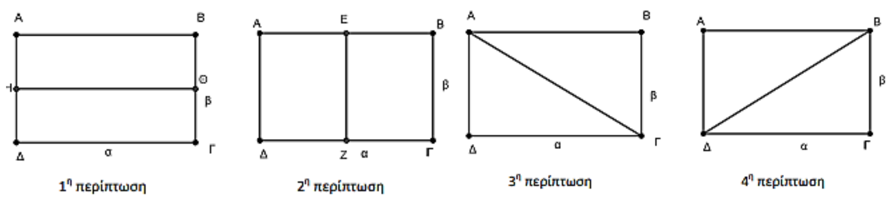
ii. Είναι $(B\Delta ZH) = B\Delta^2 = \left(\alpha\sqrt{2}\right)^2 = 2\alpha^2 = 2(AB\Gamma\Delta)$



γ) Στο τετράγωνο ΒΔΖΗ η πλευρά του ισούται με $\alpha\sqrt{2}$ επομένως η διαγώνιός του ΔΗ , σύμφωνα με το α) ερώτημα, κα είναι ίση με $\alpha\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\alpha$. Επομένως η πλευρά του τετραγώνου ΔΗΘΚ είναι 2α, οπότε $(\Delta H\Theta K) = 4\alpha^2$.
Συγκρίνοντας το εμβαδό του τετραγώνου ΔΗΘΚ με το εμβαδό του ΒΔΖΗ παρατηρούμε ότι (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ), όπως και (ΒΔΖΗ) = 2(ΑΒΓΔ). Επομένως (ΔΗΘΚ) = 2(ΒΔΖΗ) = 4(ΑΒΓΔ).
Επομένως σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδό

από το προηγούμενο του. Το αρχικό τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό α^2, το ΒΔΖΗ έχει εμβαδό $2\alpha^2$, το ΔΗΘΚ έχει εμβαδό $4\alpha^2$.
Σχεδιάζοντας τετράγωνο με πλευρά τη διαγώνιο του ΔΗΘΚ θα προκύψει τετράγωνο με εμβαδό $8\alpha^2$. Επομένως για να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, θα πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία αυτή συνολικά τέσσερις φορές. Δηλαδή, μετά το τετράγωνο ΔΗΘΚ του σχήματος θα χρειαστεί να φτιάξουμε, όπως περιεγράφηκε, δύο ακόμη τετράγωνα.

18564.α)



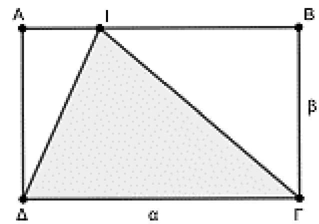
Κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να χωριστεί ένα ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία είναι είτε φέροντας τις μεσοπαράλληλες των απέναντι πλευρών του ορθογωνίου είτε τις διαγώνιες του.
Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπως και η 3η και 4η θεωρούνται διαφορετικές αφού το χωρίο είναι κήπος και έχει σημασία ο προσανατολισμός του.
Αν ΑΒ = ΓΔ = α και ΑΔ = ΒΓ = β τότε (ΑΒΓΔ) = α·β.
Στην 1η περίπτωση έχουμε $(\mathrm{AB\Theta H}) = (\mathrm{H\Theta\Gamma\Delta}) = \alpha\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

Στην 2η περίπτωση έχουμε $(\mathrm{AEZ\Delta}) = (\mathrm{EB\Gamma Z}) = \frac{\alpha}{2}\cdot\beta = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$.

Στην 3η και 4η περίπτωση τα τρίγωνα που δημιουργούνται από κάθε διαγώνιο γνωρίζουμε ότι είναι ίσα, άρα και ισοδύναμα με

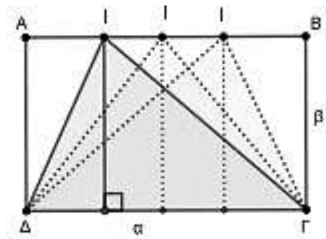
$$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{A\Delta\Gamma}) = (\mathrm{AB\Delta}) = (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}).$$

β) i. Έστω ότι το εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του ορθογωνίου είναι το σημείο Ι, τότε οι απέναντι κορυφές είναι οι Γ και Δ. Οπότε σχηματίζεται το τρίγωνο ΙΔΓ που η πλευρά του ΔΓ είναι το μήκος α του ορθογωνίου και το ύψος προς αυτή είναι η απόσταση του Ι από τη ΔΓ, δηλαδή η άλλη διάσταση του ορθογωνίου που ισούται με β. Άρα



$\left(\mathrm{I\Delta\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta}\right)$.

ii. Έστω ότι η θέση του σημείου Ι μεταβάλλεται και μπορεί να είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΒ. Σε κάθε τέτοια μετακίνηση του σημείου Ι, το τρίγωνο που σχηματίζεται έχει εμβαδό το μισό του αρχικού ορθογωνίου όπως αποδείχθηκε στο β) i. ερώτημα.



Οι θέσεις του Ι είναι τα άπειρα εσωτερικά σημεία της πλευράς ΑΒ.

18565.α) i. Οι ακτίνες ΟΑ και ΚΒ είναι κάθετες στο εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ στα σημεία επαφής Α και Β.
Το τμήμα ΚΕ είναι παράλληλο στο ΑΒ και αφού ΑΒ⊥ΟΑ, θα είναι και ΚΕ⊥ΟΑ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΚΕ έχει 3 ορθές γωνίες και είναι ορθογώνιο. Επομένως ΑΕ=ΚΒ=2 και ΟΕ=ΟΑ-ΕΑ=7-2=5.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΚ η υποτείνουσα του ΟΚ είναι ΟΓ+ΓΔ+ΔΚ=7+4+2=13.
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\mathrm{KE}^2=\mathrm{OK}^2-\mathrm{OE}^2=13^2-5^2=169-25=144\Leftrightarrow \mathrm{KE}=12$, οπότε και ΑΒ = 12.
ii. Στο τετράπλευρο ΑΒΚΟ είναι ΟΑ⊥ΑΒ και ΚΒ⊥ΑΒ, άρα ΟΑ//ΚΒ. Επίσης ΟΑ=7≠2=ΚΒ, άρα οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες, οπότε το ΑΒΚΟ είναι τραπέζιο, στο οποίο η μικρή του βάση είναι η ΚΒ, η μεγάλη βάση του η ΟΑ και το ύψος του είναι το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΒ. Οπότε

$$\left(\mathrm{ABKO}\right)=\frac{\left(\mathrm{KB}+\mathrm{KA}\right)\mathrm{AB}}{2}=\frac{\left(2+7\right)\cdot 12}{2}=54\text{τ.μ.}$$

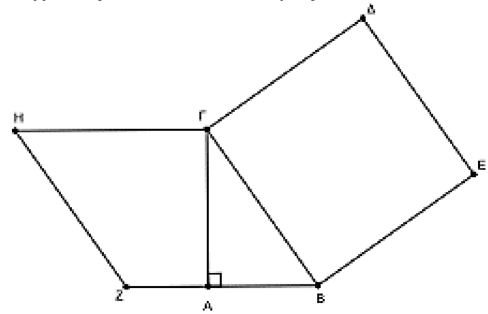
β) Το ΑΒΚΕ είναι ορθογώνιο, άρα (ΑΒΚΕ) = ΑΒ·ΚΒ
$\Leftrightarrow 4\sqrt{14}=2\mathrm{AB}\Leftrightarrow \mathrm{AB}=2\sqrt{14}=\mathrm{KE}$.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΕ έχουμε:

$$\mathrm{OK}^2=\mathrm{OE}^2+\mathrm{KE}^2=5^2+\left(2\sqrt{14}\right)^2=25+56=81\Leftrightarrow \mathrm{OK}=9.$$

Για το τμήμα ΟΚ ισχύει ότι

$\mathrm{OK}=\mathrm{O\Gamma}+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{K}\Leftrightarrow 9=7+\Gamma\Delta+2\Leftrightarrow \Gamma\Delta=0$. Δηλαδή η διάκεντρος ΟΚ των δύο κύκλων ισούται με το άθροισμα των ακτίνων τους. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

18566.α) Το τετράπλευρο ΒΓΘΗ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον οι διαδοχικές πλευρές του ΒΓ και ΒΗ είναι ίσες από την κατασκευή, οπότε το ΒΓΘΗ είναι ρόμβος με πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Άρα η περίμετρος του ρόμβου



είναι ίση με 4·ΒΓ. Επίσης το τετράγωνο ΒΓΔΕ έχει πλευρά ίση με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, άρα η περίμετρός του είναι ίση με 4·ΒΓ. Δηλαδή ο ρόμβος και το τετράγωνο έχουν ίσες περιμέτρους.

β) Είναι $(\mathrm{B\Gamma\Delta E})=\mathrm{B\Gamma}^2$ και $(\mathrm{B\Gamma HZ})=\mathrm{BZ}\cdot\Gamma\mathrm{A}$.

Συγκρίνοντας τα δύο εμβαδά παρατηρούμε ότι, για το εμβαδό του τετραγώνου το τμήμα ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΒΓ και για το εμβαδό του ρόμβου, το ΒΓ πολλαπλασιάζεται με το ΑΓ.

Το τμήμα ΑΓ είναι κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ και το τμήμα ΒΓ είναι υποτείνουσα. Όμως η κάθετη πλευρά είναι πάντα μικρότερη την υποτείνουσα, επομένως το εμβαδό του ρόμβου είναι μικρότερο από το εμβαδό του τετραγώνου και δεν γίνεται ποτέ τα δύο σχήματα να είναι ισεμβαδικά.

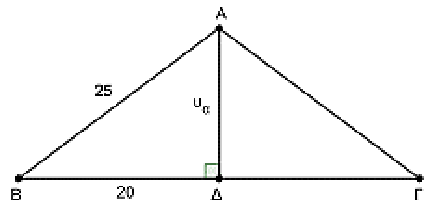
Άρα ο ισχυρισμός 2 είναι σωστός .

21124.α) i. Είναι $\alpha^2=40^2=1600$ και

$\beta^2+\gamma^2=25^2+25^2=625+625=1250$.

Είναι $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ οπότε $\mathrm{A}>90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, το ύψος του $ΑΔ = υ_α$ είναι και διάμεσος του τριγώνου, άρα $ΒΔ = ΔΓ = 20$.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:



$$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225 \Leftrightarrow ΑΔ = 15$$

Είναι $Ε = (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 15 = 300$.

Είναι

$$Ε = (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}β \cdot υ_β \Leftrightarrow 300 = \frac{1}{2} \cdot ΑΓ \cdot υ_β \Leftrightarrow 600 = 25υ_β \Leftrightarrow υ_β = \frac{600}{25} = 24.$$

iii. Είναι $υ_γ = υ_β = 24$ και $ΑΔ = υ_α = 15$. Είναι $υ_γ^2 = 24^2 = 576$ και $υ_α^2 + υ_β^2 = 225 + 576 = 801$.

Επειδή $υ_γ^2 < υ_α^2 + υ_β^2$ το τρίγωνο με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, είναι οξυγώνιο.

β) Έστω α, β, γ οι πλευρές οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με β = γ και $υ_α, υ_β, υ_γ$ τα αντίστοιχα ύψη. Είναι

$$α^2 > β^2 + γ^2 \Leftrightarrow α^2 > 2β^2 \Leftrightarrow \frac{α^2}{β^2} > 2 \Leftrightarrow \frac{α}{β} > \sqrt{2} > 1.$$

Είναι $Ε = \frac{1}{2}α \cdot υ_α = \frac{1}{2}β \cdot υ_β = \frac{1}{2}γ \cdot υ_γ$ και επειδή β = γ, είναι και $υ_γ = υ_β$.

Επομένως το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου , είναι ισοσκελές.

Επίσης είναι $\frac{1}{2}α \cdot υ_α = \frac{1}{2}β \cdot υ_β \Leftrightarrow \frac{α}{β} = \frac{υ_β}{υ_α}$ και επειδή $\frac{α}{β} > 1$, είναι

$$\frac{υ_β}{υ_α} > 1 \Leftrightarrow υ_β > υ_α.$$

Είναι $υ_γ^2 < υ_γ^2 + υ_α^2 = υ_β^2 + υ_α^2$ άρα το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ , είναι οξυγώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

21183.α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε: $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 + ΑΒ^2 = \sqrt{2}^2 + 2^2 = 2 + 2 = 4 \Leftrightarrow ΑΓ = 2$.

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΖ είναι $ΑΗ = ΑΔ + ΔΗ = \sqrt{2} + 1$, οπότε από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΖ^2 = ΑΗ^2 + ΗΖ^2 = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}.$$

ii. Είναι $ΕΓ = ΔΓ - ΔΕ = \sqrt{2} - 1$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΕΓ έχουμε:

$$ΖΓ^2 = ΖΕ^2 + ΕΓ^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

γ) Είναι $ΑΖ^2 = 4 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow ΑΖ = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ και

$ΓΖ^2 = 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow ΓΖ = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

Στο τρίγωνο ΑΖΓ με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων προκύπτει

$$ΑΓ^2 = ΑΖ^2 + ΖΓ^2 - 2ΑΖ \cdot ΖΓ \cdot συνω \Leftrightarrow$$

$$2^2 = 4 + 2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot συνω \Leftrightarrow$$

$$4 = 8 - 2\sqrt{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(4-2\sqrt{2}\right)} \cdot συνω \Leftrightarrow 2\sqrt{16 - 4\cdot 2} \cdot συνω = 4 \Leftrightarrow \sqrt{8} \cdot συνω = 2 \Leftrightarrow$$

$$συνω = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \hat{ω} = 45^\circ.$$

21840.α) $\left(ΑΒΓΔ\right) = 54 \Leftrightarrow \dfrac{\left(ΑΒ + ΓΔ\right)\cdot ΑΔ}{2} = 54 \Leftrightarrow \dfrac{\left(5+13\right)\cdot ΑΔ}{2} = 54 \Leftrightarrow$

$\dfrac{18 \cdot ΑΔ}{2} = 54 \Leftrightarrow 9ΑΔ = 54 \Leftrightarrow ΑΔ = 6$.

β) Η γωνία ΒΕΓ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ έχει 3 ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα ΒΕ = ΑΔ = 6. Ακόμη ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 13 – 5 = 8.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε

$ΒΓ^2 = ΒΕ^2 + ΕΓ^2 = 36 + 64 = 100 \Leftrightarrow ΒΓ = 10$.

γ) Η κάθετος ΟΚ από το κέντρο Ο στη χορδή ΕΓ του κύκλου διχοτομεί τη χορδή, άρα το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΕΓ. Το Ο ως κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου ΒΓ. Οπότε το ΟΚ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΕΓ του τριγώνου ΒΕΓ και άρα $ΟΚ = \dfrac{ΒΕ}{2} = 3$.

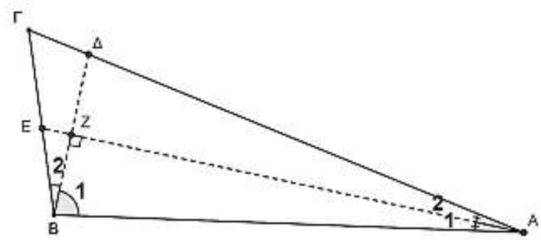
Αφού θ ΟΚ είναι κάθετος στην ΕΓ, άρα κα είναι κάθετος και στην ΔΓ, οπότε το τρίγωνο ΔΟΚ είναι ορθογώνιο και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΟΚ έχουμε:

$\Delta O^2 = \Delta K^2 + KO^2 = 81 + 9 = 90 \Leftrightarrow \Delta O = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

δ) Είναι $(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\Delta\Gamma \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα και εφόσον η ΔΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΔΓ, ισχύει ότι $(B\Delta O) = \frac{(B\Delta\Gamma)}{2} = \frac{39}{2}$.

22100.α) i. Αφού η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, τότε $A_1 = A_2 = 10^\circ$.



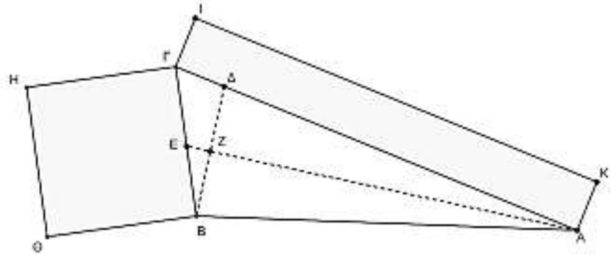
Επειδή το τρίγωνο ΒΖΑ είναι ορθογώνιο, αφού η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΕ, οι γωνίες του A_1 και B_1 είναι συμπληρωματικές, οπότε

$A_1 + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$.

Είναι $\Gamma BA = B = 100^\circ$, οπότε $B_2 = \Gamma BA - B_1 = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$, άρα $\Gamma B\Delta = A = 20^\circ$.

ii. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν $\Gamma B\Delta = A$ και τη γωνία Γ κοινή, οπότε θα είναι όμοια γιατί έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\Gamma\Delta B = AB\Gamma$, οπότε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών είναι οι ΓΔ, ΒΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma B\Delta$ και A ,οι ΒΔ, ΑΒ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία Γ (κοινή) και οι ΒΓ, ΑΓ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\Gamma\Delta B$ και $AB\Gamma$.

β) Έστω ΒΓΗΘ είναι το τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ΑΓΙΚ είναι το ορθογώνιο με διαστάσεις την ΑΓ και το τμήμα ΓΔ. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΗΘ



είναι (ΒΓΗΘ) = $ΒΓ^2$ και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΓΙΚ είναι (ΑΓΙΚ) = ΑΓ· ΓΔ. Τα εμβαδά των τετραπλεύρων θα είναι ίσα αν ισχύει η σχέση:

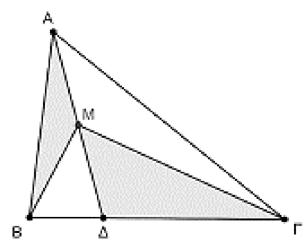
$$ΒΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΔ \Leftrightarrow \frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ} \quad (1).$$

Από το ερώτημα α) ii. τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομόλογων πλευρών τους είναι ίσοι, δηλαδή $\frac{ΓΔ}{ΒΓ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$.

Επομένως $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΓΔ}{ΒΓ} \Leftrightarrow ΒΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΔ$.

Συνεπώς, ισχύει η σχέση (1), άρα τα τετράπλευρα ΒΓΗΘ και ΑΓΙΚ έχουν ίσα εμβαδά.

22104.α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΒΔ θα έχουν ίσα εμβαδά γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Β στον φορέα της πλευράς ΑΔ.



Οπότε $(ΑΒΜ) = (ΜΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ)$ (1).

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ η ΓΜ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΜΓΔ θα έχουν ίσα εμβαδά, γιατί έχουν ίσες βάσεις, τις ΜΑ και ΜΔ αντίστοιχα και κοινό ύψος από την κορυφή Γ στον φορέα της πλευράς ΑΔ.

Οπότε $(ΑΓΜ) = (ΜΔΓ) = \frac{1}{2}(ΑΓΔ)$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΜ) + (ΜΒΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΔ) + \frac{1}{2}(ΑΓΔ) = \frac{1}{2}\left[(ΑΒΔ) + (ΑΓΔ)\right] = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

β) Αν είναι (ΑΒΜ) = (ΜΔΓ) , τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΓΔ}) \Leftrightarrow (\text{ΑΒΔ}) = (\text{ΑΓΔ})$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος από την κοινή τους κορυφή Α στον φορέα των βάσεων τους ΒΔ και ΔΓ. Επομένως για να έχουν ίσα εμβαδά αρκεί να έχουν ίσες βάσεις, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ. Αυτό θα συμβαίνει όταν το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

Όταν το σημείο Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε

$(\text{ΑΒΜ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$ και όμοια

$(\text{ΜΔΓ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$.

22396.α)i. Είναι ΑΒ = ΑΓ = ΑΔ + ΔΓ = 3+2=5.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΑΔ}^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Leftrightarrow \text{ΒΔ} = 4.$$

ii. Είναι $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4 = 10$

β) i) Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\text{ΑΒΕ} = 90^\circ$ άρα για το ύψος του ΒΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΑΕ, έχουμε

$$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΔΑ}\cdot\text{ΔΕ} \Leftrightarrow 4^2 = 3\text{ΔΕ} \Leftrightarrow \text{ΔΕ} = \frac{16}{3}.$$

ii. Είναι $\text{ΓΕ} = \text{ΔΕ} - \text{ΔΓ} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$ και

$$(\text{ΒΓΕ}) = \frac{1}{2}\text{ΓΕ}\cdot\text{ΒΔ} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot 4 = \frac{20}{3}.$$

22509.α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε $\text{ΜΓ}^2 = \text{ΜΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = \alpha^2 + x^2$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΝΓ έχουμε

$$\text{ΝΓ}^2 = \text{ΝΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2 = (2x)^2 + (2\alpha)^2 = 4x^2 + 4\alpha^2.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΝ έχουμε:

$$\text{ΜΝ}^2 = \text{ΑΝ}^2 + \text{ΑΜ}^2 = (\alpha + 2x)^2 + (2\alpha - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\text{ΜΝ}^2 = \alpha^2 + \cancel{4\alpha x} + 4x^2 + 4\alpha^2 - \cancel{4\alpha x} + x^2 \Leftrightarrow \text{ΜΝ}^2 = 5\alpha^2 + 5x^2.$$

β) Από το α) έπεται $\text{ΜΓ}^2 + \text{ΓΝ}^2 = \alpha^2 + x^2 + 4\alpha^2 4x^2 = 5\alpha^2 + 5 = \text{ΜΝ}^2$, οπότε το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΜΝ.

γ) Είναι

$$\left(\mathrm{AMN}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AN}=\frac{1}{2}\left(2\alpha-x\right)\left(\alpha+2x\right)=\frac{1}{2}\left(2\alpha^2+4\alpha x-\alpha x-2x^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\mathrm{AMN}\right)=\frac{1}{2}\left(2\alpha^2+3\alpha x-2x^2\right),$$

$$\left(\mathrm{MN\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{M\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma N}=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+x^2}\cdot\sqrt{4\alpha^2+4x^2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\mathrm{MN\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+x^2}\cdot\sqrt{4\left(\alpha^2+x^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\left(\mathrm{MN\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+x^2}\cdot 2\cdot\sqrt{\alpha^2+x^2}=\left(\sqrt{\alpha^2+x^2}\right)^2=\alpha^2+x^2.$$

δ) Είναι $\left(\mathrm{AMN}\right)=\left(\mathrm{MN\Gamma}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(2\alpha^2+3\alpha x-2x^2\right)=\alpha^2+x^2\Leftrightarrow$

$$\cancel{2\alpha^2}+3\alpha x-2x^2=\cancel{2\alpha^2}+2x^2\Leftrightarrow$$

$4x^2-3\alpha x=0\Leftrightarrow x\left(4x-3\alpha\right)=0\Leftrightarrow x=0$ απορρίπτεται ή

$$4x-3\alpha=0\Leftrightarrow x=\frac{3\alpha}{4}.$$

Επομένως $\mathrm{AM}=\frac{3}{4}\alpha$ και η θέση του M είναι γνωστή.

22510.α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ θ ΒΟ είναι διάμεσος, οπότε χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΔ σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Επομένως (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ). Ομοίως στο τρίγωνο ΑΓΔ θ ΓΟ είναι διάμεσος, οπότε (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ).

β) Από το α) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) = (ΒΟΔ) (1) και (ΑΟΓ) = (ΓΟΔ) (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΔ) + (ΓΟΔ), οπότε

(ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) = (ΒΟΓΔ).

Αφαιρώντας από τα δύο μέλη το (ΒΟΓ) έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ).

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε (ΑΟΒ) + (ΑΟΓ) –(ΒΟΓ) = (ΒΔΓ) (3).

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

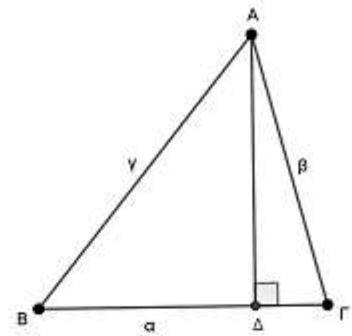
(ΒΟΓ) + (ΑΟΒ) – (ΑΟΓ) = (ΓΕΑ) (4) και (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) – (ΒΟΑ) = (ΑΖΒ) (5).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4), (5) παίρνουμε

(ΑΟΒ) + (ΒΟΓ) + (ΑΟΓ) = (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ) $\Leftrightarrow$ (ΑΒΓ) = (ΒΔΓ) + (ΓΕΑ) + (ΑΖΒ).

Επομένως 2(ΑΒΓ) =(ΑΒΓ) + (ΔΒΓ) + (ΕΓΑ) + (ΖΑΒ) = (ΑΖΒΔΓΕ).

3ο Θέμα



17908.α) Είναι $\gamma^2 = 25$ και

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 16 + 17 = 33,$$

δηλαδή $\gamma^2 < \alpha^2 + \beta^2$ οπότε $\Gamma < 90^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, εφόσον απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του.

β) i. Από τη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 25 = 33 - 2 \cdot 4 \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 8\Delta\Gamma = 8 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 1$, οπότε $\Delta\mathrm{B} = \mathrm{B}\Gamma - \Delta\Gamma = 3$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\mathrm{A}\Delta^2 = \beta^2 - \Delta\Gamma^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 - 1^2 = 17 \Leftrightarrow \mathrm{A}\Delta = 4.$$

Είναι $\left(\mathrm{AB}\Gamma\right) = \frac{1}{2}\mathrm{B}\Gamma \cdot \mathrm{A}\Delta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

2ο Θέμα

15979.α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων είναι:

$$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2 - 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{συνΑ} \Leftrightarrow$$

$$\text{ΒΓ}^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \text{συν}120^\circ = 25 + 25 - 50\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\text{ΒΓ}^2 = 50 + 25 = 75 \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,.$$

β) Είναι $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

17346.α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2 - 2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{συνΒ} = 6^2 + 4^2 - 2\cdot 6\cdot 4\cdot\text{συν}60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\text{ΑΓ}^2 = 36 + 16 - 48\cdot\frac{1}{2} = 52 - 24 = 28 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}\,.$$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΑΒ, άρα η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου είναι η Γ, γιατί βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Είναι $\text{ΑΒ}^2 = 6^2 = 36$ και $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 = 28 + 16 = 44$, άρα

$\text{ΑΒ}^2 < \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2 \Leftrightarrow \text{Γ} < 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

γ) Είναι $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{ημΒ} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\text{ημ}60^\circ = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

17347.α) $(\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\text{ημ}60^\circ = 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.

β) Το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α ισούται με $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$, άρα το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ που έχει πλευρά 6 είναι

$$\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\,.$$

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ είναι

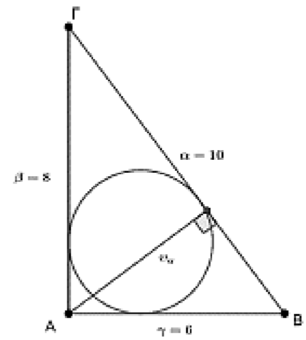
$$(\text{ΑΓΔΕ}) = (\text{ΑΓΔ}) + (\text{ΑΔΕ}) = 15\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\,.$$

21196.α) $\text{Ε} = (\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\beta\cdot\gamma = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12 = 48$

β) i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2=8^2+6^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2=64+36=100 \Leftrightarrow \alpha=10.$$

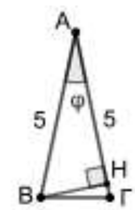


ii. $\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow 48=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow$

$$48=5\cdot\upsilon_\alpha \Leftrightarrow \upsilon_\alpha=\frac{48}{5}.$$

iii. Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε το εμβαδό του Ε είναι Ε = τ ·ρ . Η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{24}{2}=12$, οπότε $\mathrm{E}=\tau\cdot\rho \Leftrightarrow 48=12\rho \Leftrightarrow \rho=4$.



21299.α) $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\varphi=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{2}{5}=5$

β) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{BH} \Leftrightarrow 5=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\mathrm{BH} \Leftrightarrow \mathrm{BH}=2$

21838.α) Είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot\eta\mu 60^\circ=48\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}.$$

β) i. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος του τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα .

Αφού η ΓΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ).

ii. Αφού (ΒΕΓ)=(ΑΕΓ) και (ΒΕΓ)+(ΑΕΓ)=(ΑΒΓ), άρα

$$(\mathrm{BE\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\cdot 24\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$$

Ομοίως αφού η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$(\Delta\mathrm{B\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})=12\sqrt{3}$, οπότε $(\mathrm{EB\Gamma})=(\Delta\Gamma\mathrm{B})=12\sqrt{3}$.

22259.α) Είναι $Β\Delta = \Delta Ε = ΕΓ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

Το ΑΗ είναι ύψος στα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ, οπότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων θα ισούται με το λόγο των αντιστοίχων βάσεων. Δηλαδή: $\frac{(Α\Delta Ε)}{(ΑΒΓ)} = \frac{\Delta Ε}{ΒΓ} = \frac{\frac{1}{3}ΒΓ}{ΒΓ} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (Α\Delta Ε) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$.

β) Στο τρίγωνο ΑΔΕ, η ΑΜ είναι διάμεσος. Επομένως το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Τα ΑΜΕ και ΑΜΔ. Οπότε

$(ΑΜΕ) = \frac{1}{2}(Α\Delta Ε) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(ΑΒΓ) = \frac{1}{6}(ΑΒΓ)$.

22511. α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνΑ = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot συν60^\circ \Leftrightarrow$

$ΒΓ^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7 \Leftrightarrow ΒΓ = \sqrt{7}$.

β) $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot ημΑ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot ημ60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

γ) Είναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}α \cdot υ_α \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot υ_α \Leftrightarrow$

$3\sqrt{3} = \sqrt{7}υ_α \Leftrightarrow υ_α = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

4ο θέμα

22101.α) i. Είναι

$$\left(\text{ΑΒΓ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\text{ημ}60^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$$

ii. Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\text{ΒΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2-2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{συνΑ}=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cdot\text{συν}60^\circ\Leftrightarrow$$

$$\text{ΒΓ}^2=9+16-24\cdot\frac{1}{2}=25-12=13\Leftrightarrow\text{ΒΓ}=\sqrt{13}.$$

β) Είναι $\left(\text{ΑΒΓ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\text{ημΑ}=6\cdot\text{ημΑ}$.

Για την γωνία Α του τριγώνου ισχύει ότι $0^\circ<\text{Α}<180^\circ$, άρα

$$0<\text{ημΑ}\le 1\Leftrightarrow 0<6\text{ημΑ}\le 6\Leftrightarrow 0<\left(\text{ΑΒΓ}\right)\le 6.$$

Η μέγιστη τιμή του ημΑ είναι 1, όταν η γωνία Α είναι 90^o. Επομένως, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν η γωνία Α είναι ορθή και η μέγιστη τιμή του είναι Ε = 6·1 = 6 τ.μ.

22369.α) Εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\text{ΒΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2-2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{συνΑ}\Leftrightarrow$$

$$7^2=8^2+\text{ΑΓ}^2-2\cdot 8\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{συν}60^\circ\Leftrightarrow 49=64+\text{ΑΓ}^2-16\text{ΑΓ}\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\text{ΑΓ}^2-8\text{ΑΓ}+15=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ=4 και ρίζες ΑΓ = 3 ή ΑΓ = 5.

β) i) Αν ΑΓ = 3 , τότε $\text{ΑΓ}^2+\text{ΒΓ}^2=3^2+7^2=9+49=58$

και $\text{ΑΒ}^2=8^2=64$, άρα $\text{ΑΒ}^2>\text{ΑΓ}^2+\text{ΒΓ}^2\Leftrightarrow\text{Γ}>90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο που είναι άτοπο.

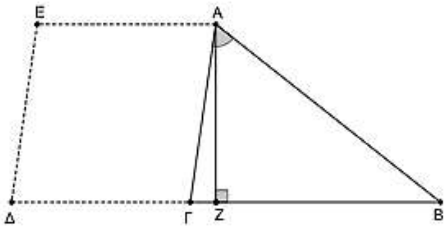
Αν ΑΓ = 5 , τότε $\text{ΑΓ}^2+\text{ΒΓ}^2=5^2+7^2=25+49=74$ και $\text{ΑΒ}^2=8^2=64$,

άρα $\text{ΑΒ}^2<\text{ΑΓ}^2+\text{ΒΓ}^2\Leftrightarrow\text{Γ}<90^\circ$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

Επομένως ΑΓ = 5.

ii) Είναι $\left(\text{ΑΒΓ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\text{ημ}60^\circ=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

iii) Έστω ΑΖ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α. Τότε αυτό θα είναι ύψος και του ρόμβου ΑΓΔΕ με αντίστοιχη βάση την ΓΔ. Είναι ΓΔ=ΑΓ=5 επειδή το ΑΓΔΕ είναι ρόμβος. Είναι



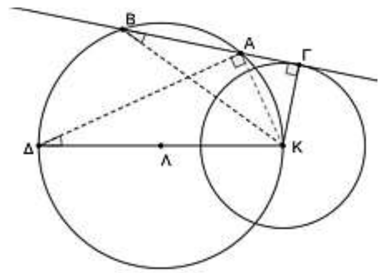
$$\left(\text{ΑΒΓ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΖ}\Leftrightarrow 10\sqrt{3}=\frac{1}{2}7\cdot\text{ΑΖ}\Leftrightarrow$$

$$\text{ΑΖ}=\frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Επομένως το εμβαδόν του ρόμβου ΑΓΔΕ είναι

$$\left(\text{ΑΓΔΕ}\right)=\text{ΓΔ}\cdot\text{ΑΖ}=5\cdot\frac{20\sqrt{3}}{7}=\frac{100\sqrt{3}}{7}.$$

22568.α) i. Οι γωνίες ΚΒΓ και ΚΔΑ είναι εγγεγραμμένες γωνίες του κύκλου (Λ,R) που βαίνουν στο ίδιο τόξο ΚΑ, άρα είναι ίσες. Η ευθεία ΓΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ,ρ) στο σημείο του Γ, επομένως η γωνία ΚΓΒ είναι ορθή. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R) και η γωνία ΚΑΔ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα είναι ορθή.



Τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ έχουν $\text{ΚΓΒ}=\text{ΚΑΔ}=90^\circ$ και $\text{ΚΒΓ}=\text{ΚΔΑ}$, επομένως έχοντας δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια.

ii. Η ΚΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Λ,R), άρα ΚΔ=2·R=20 και η ΚΓ είναι ακτίνα του κύκλου (Κ,ρ), άρα ΚΓ=ρ=6. Εφόσον τα τρίγωνα ΚΓΒ και ΚΑΔ είναι όμοια, έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\frac{\text{ΚΓ}}{\text{ΚΑ}}=\frac{\text{ΚΒ}}{\text{ΚΔ}}=\frac{\text{ΓΒ}}{\text{ΔΑ}}\Leftrightarrow\frac{6}{\text{ΚΑ}}=\frac{\text{ΚΒ}}{20}\Leftrightarrow\text{ΚΑ}\cdot\text{ΚΒ}=120\ .$$

β) Αφού είναι ΚΒ=15 και ΚΑ·ΚΒ=120 τότε 15·ΚΑ=120, άρα ΚΑ=8. Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΑΓ έχουμε

$$\text{ΓΑ}^2=\text{ΚΑ}^2-\text{ΚΓ}^2=64-36=28\Leftrightarrow\text{ΓΑ}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}.$$

Είναι $\left(\text{ΑΓΚ}\right)=\frac{1}{2}\text{ΚΓ}\cdot\text{ΑΚ}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{7}=6\sqrt{7}$.

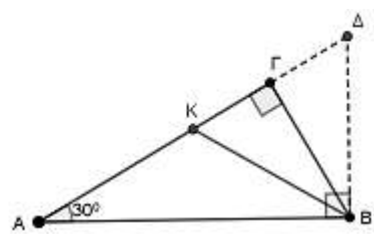
3ο Θέμα

21783.α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{A}=30^\circ$ άρα $\mathrm{B\Gamma}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=1$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{B\Gamma}^2=2^2-1^2=4-1=3\Leftrightarrow \mathrm{A\Gamma}=\sqrt{3}$$

β) Από τα δεδομένα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι ορθογώνια. Επίσης, έχουν τη γωνία Α κοινή, οπότε θα είναι όμοια. Επομένως θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Άρα



$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sqrt{3}\mathrm{A\Delta}=4\Leftrightarrow\mathrm{A\Delta}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

γ) Το Κ είναι μέσο του ΑΔ επομένως $\mathrm{AK}=\dfrac{\mathrm{A\Delta}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Είναι $(\mathrm{KAB})=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AK}\cdot\eta\mu 30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Λόγος Εμβαδών

2ο Θέμα

15978.α) Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Δηλαδή: $\frac{(\text{ΑΔΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{\frac{1}{4}\text{ΑΒ}\cdot\frac{1}{2}\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow(\text{ΑΔΖ})=\frac{1}{8}(\text{ΑΒΓ})$,

$$\frac{(\text{ΒΕΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΒΕ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{\frac{3}{4}\text{ΒΑ}\cdot\frac{2}{3}\text{ΒΓ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\text{ΒΕΔ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ}) \text{ και}$$

$$\frac{(\text{ΓΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΓΖ}\cdot\text{ΓΕ}}{\text{ΓΑ}\cdot\text{ΓΒ}}=\frac{\frac{1}{2}\text{ΓΑ}\cdot\frac{1}{3}\text{ΒΓ}}{\text{ΓΑ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow(\text{ΓΕΖ})=\frac{1}{6}(\text{ΑΒΓ}).$$

β) $(\text{ΔΕΖ})=(\text{ΑΒΓ})-(\text{ΑΔΖ})-(\text{ΒΕΔ})-(\text{ΓΕΖ})\Leftrightarrow$

$$(\text{ΔΕΖ})=\frac{1}{8}(\text{ΑΒΓ})-\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})-\frac{1}{6}(\text{ΑΒΓ})=\frac{5}{24}(\text{ΑΒΓ}).$$

16127.α) $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΔ}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8=36$.

β) i) Ο λόγος ομοιότητας των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι $\lambda=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β}'\text{Γ}'}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

ii. Είναι $\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')}=\lambda^2\Leftrightarrow\frac{36}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{36}{(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow$

$$9(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')=36\cdot 4\Leftrightarrow(\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}')=\frac{\cancel{36}^{4}\cdot 4}{\cancel{9}}=16.$$

16756.α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Β. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Β σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΔΒΓ})}=\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}}{\text{ΔΒ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΒ}}.$$

β) Αφού είναι ΑΒ = 5ΑΔ, τότε: ΔΒ = ΑΒ − ΑΔ = 5ΑΔ − ΑΔ = 4ΑΔ
Οπότε, είναι:

$$\frac{25}{(\Delta\mathrm{B}\Gamma)}=\frac{5\mathrm{A}\Delta}{4\mathrm{A}\Delta}\Leftrightarrow\frac{25}{(\Delta\mathrm{B}\Gamma)}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 5(\Delta\mathrm{B}\Gamma)=100\Leftrightarrow(\Delta\mathrm{B}\Gamma)=20.$$

16770.α) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ έχουν:

- $\mathrm{EOB}=\Delta\mathrm{OA}$ επειδή η ΟΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{EO}\Delta$.
- $\mathrm{E}=\Delta=70^\circ$

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μια αντίστοιχα.
β) Αφού τα δύο τρίγωνα είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\mathrm{E}}=\hat{\Delta}$	$\mathrm{E}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}$	$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{A}}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΕΒ	ΟΒ	ΕΒ	ΟΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΔΑ	ΟΑ	ΑΔ	ΟΔ

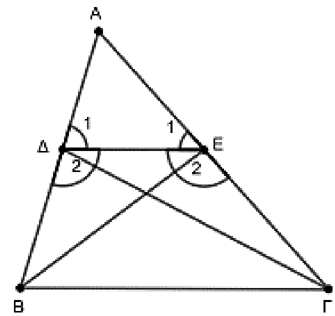
Επομένως, θα είναι: $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{O}\Delta}$.

γ) Τα τρίγωνα ΟΕΒ και ΟΔΑ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του
λόγου ομοιότητας, δηλαδή

$$\frac{(\mathrm{OEB})}{(\mathrm{O}\Delta\mathrm{A})}=\left(\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{OEB})}{28}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4(\mathrm{OEB})=252\Leftrightarrow(\mathrm{OEB})=63.$$

16806.α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΒ έχουν τις γωνίες Δ_1 και Δ_2 παραπληρωματικές,

άρα $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})}=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{\Delta E}}{\mathrm{\Delta B}\cdot\mathrm{\Delta E}}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}$.



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΔΕΓ έχουν παραπληρωματικές τις γωνίες E_1 και E_2,

άρα $\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}=\frac{\mathrm{AE}\cdot\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{E\Gamma}\cdot\mathrm{E\Delta}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

β) Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή, έχουμε ότι $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Delta B}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{E\Gamma}}$.

Επομένως από το α) ερώτημα ισχύει ότι

$$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta EB})}=\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{\Delta E\Gamma})}\Leftrightarrow(\mathrm{\Delta EB})=(\mathrm{\Delta E\Gamma}).$$

18561.α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν $\mathrm{B}+\mathrm{B}_{\varepsilon\xi}=180^\circ$, οπότε

$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{B\Delta E})}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B\Delta}\cdot\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}}{2\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{25}{(\mathrm{B\Delta E})}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\mathrm{B\Delta E})=50\mathrm{m}^2.$$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το τμήμα ΑΓ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΔ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ισοδύναμα, δηλαδή (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ).
Η διαγώνιος ΑΔ χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο ίσα τρίγωνα, τα ΑΗΔ και ΑΕΔ, οπότε αυτά είναι ισοδύναμα, δηλαδή

$$(\mathrm{A\Delta Z})=(\mathrm{AE\Delta})=(\mathrm{AB\Gamma})+(\mathrm{A\Gamma\Delta})+(\mathrm{B\Delta E})=4(\mathrm{AB\Gamma}).$$

20667.α) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}4\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\Gamma=4\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\Gamma$.

β) $(\mathrm{\Gamma\Delta E})=\frac{1}{2}\mathrm{\Gamma\Delta}\cdot\mathrm{\Gamma E}\cdot\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}\cdot\eta\mu\Gamma=3\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\Gamma$.

γ) $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{\Gamma\Delta E})}=\frac{4\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\Gamma}{3\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\Gamma}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{12}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow$

$3(\mathrm{AB\Gamma})=48\Leftrightarrow(\mathrm{AB\Gamma})=16$.

21120.α) i) Γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου. Επίσης, αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια. Επομένως τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι $\lambda = \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι

$$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \lambda^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\mathrm{A\Delta E}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma}).$$

β) Είναι $(\mathrm{A\Delta E}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ και

$(\mathrm{B\Gamma E\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma}) - (\mathrm{A\Delta E}) = 2 - 1 = 1$.

21304.α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, οι πλευρές του τριγώνου ΑΔΕ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον το ΑΔΕ ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Delta E}}$.

Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι

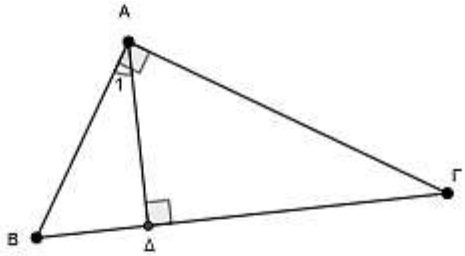
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Delta}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητάς τους, άρα οι περίμετροι των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.Επομένως η περίμετρος του ΑΔΕ είναι τριπλάσια της περιμέτρου του ΑΒΓ, δηλαδή είναι ίση με $3\cdot 8,5 = 25,5$.

γ) Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΔΕ) των όμοιων τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ, αντίστοιχα είναι $\frac{1}{9}$,

δηλαδή: $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A\Delta E})} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{15} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow (\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

21636.α) Είναι $ΒΓ^2 = 10^2 = 100$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 36 + 64 = 100$, άρα $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ, είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ και ορθή γωνία την Α.

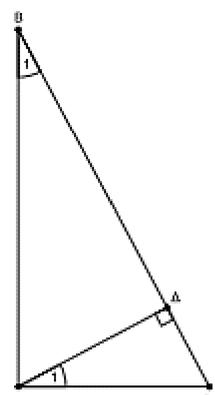


β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι:

$Α_1 + Β = 90^\circ \Leftrightarrow Α_1 = 90^\circ - Β$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Γ + Β = 90^\circ \Leftrightarrow Γ = 90^\circ - Β$, άρα $Α_1 = Γ$.

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι όμοια, με λόγο ομοιότητας $λ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

ii. Γνωρίζουμε ότι ο λόγος των εμβαδών ομοίων τριγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας. Οπότε λόγω του ερωτήματος (β, i) είναι $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)} = λ^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.



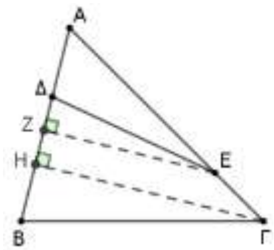
22070. α) Είναι

$β^2 + γ^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2 = α^2$ οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α και $Α = 90^\circ$.

β) i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ορθογώνια με $Β = Α_1$ αφού είναι και οι δύο γωνίες συμπληρωματικές της γωνίας Γ. Άρα είναι όμοια και ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των υποτεινουσών τους. Δηλαδή $λ = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{15}{8}$.

ii. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, άρα $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$.

4ο Θέμα



16114.α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Α κοινή, οπότε

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})}=\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}=\frac{\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\cancel{\text{ΑΓ}}}{\frac{1}{\cancel{3}}\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}\cancel{\text{ΑΓ}}}=4\Leftrightarrow$$

$$(\text{ΑΒΓ})=4(\text{ΑΔΕ}).$$

ii. Είναι

$$(\text{ΑΒΓ})=4(\text{ΑΔΕ})\Leftrightarrow\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\text{ΑΔ}\cdot\text{ΕΖ}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΗ}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{3}\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\text{ΕΖ}}{\cancel{\text{ΑΒ}}\cdot\text{ΓΗ}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\text{ΕΖ}}{\text{ΓΗ}}=\frac{3}{4}.$$

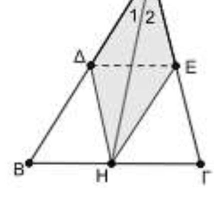
β) $$\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΑΔΕ})}=2\Leftrightarrow\frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}=2\Leftrightarrow\frac{\text{ΑΒ}\cdot\cancel{\text{ΑΓ}}}{\text{ΑΔ}\cdot\frac{3}{4}\cancel{\text{ΑΓ}}}=2\Leftrightarrow\frac{4}{3}\cdot\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}=2\Leftrightarrow$$

$$2\text{ΑΒ}=3\text{ΑΔ}\Leftrightarrow\text{ΑΔ}=\frac{2}{3}\text{ΑΒ}.$$

16582.α) i. Επειδή $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}$ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία ίση (είναι η κοινή η γωνία Α), οπότε

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}\cdot\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$(\text{ΑΔΕ})=\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ}).$$



ii. Τα τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΗΒ έχουν κοινή γωνία τη Α_1 επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(\text{ΑΗΔ})}{(\text{ΑΗΒ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΗ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΗ}}=\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\text{ΑΗΔ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΗΒ})\ (1).$$

Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΗΓ έχουν κοινή γωνία τη A_2 επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή, δηλαδή

$$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)}=\frac{ΑΕ\cdot ΑΗ}{ΑΓ\cdot ΑΗ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(ΑΗΕ)=\frac{1}{2}(ΑΗΓ)\ (2).$$

Είναι $(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)\overset{(1),(2)}{=}\frac{1}{2}(ΑΗΒ)+\frac{1}{2}(ΑΗΓ)=\frac{1}{2}(ΑΒΓ)$.

β) Επειδή ΑΔ < ΑΒ και ΑΕ<ΑΓ, τότε αν $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda$ θα είναι $0<\lambda<1$.

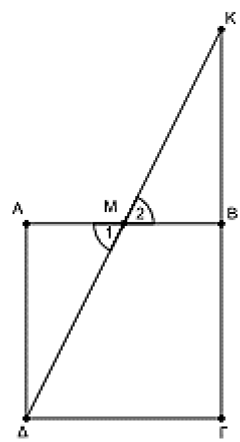
Από το προηγούμενο σκέλος είναι

$$\frac{(ΑΗΔ)}{(ΑΗΒ)}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\lambda\Leftrightarrow(ΑΗΔ)=\lambda(ΑΗΒ)\ \text{και}$$

$$\frac{(ΑΗΕ)}{(ΑΗΓ)}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\lambda\Leftrightarrow(ΑΗΕ)=\lambda(ΑΗΓ),\ \text{οπότε}$$

$$(ΑΔΗΕ)=(ΑΗΔ)+(ΑΗΕ)=\lambda(ΑΗΒ)+\lambda(ΑΗΓ)=\lambda(ΑΒΓ).$$

16732.α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή τη γωνία Κ, οπότε έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, άρα είναι όμοια.



β) Τα όμοια τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΒ έχουν λόγο ομοιότητας $\lambda=\frac{\frac{1}{2}ΜΒ}{ΔΓ}=\frac{\frac{1}{2}ΑΒ}{ΑΒ}=\frac{1}{2}$, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή:

$$\frac{(ΜΚΒ)}{(ΔΚΓ)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow(ΜΚΒ)=\frac{1}{4}(ΔΚΓ).$$

γ) Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΚΒ είναι ίσα αφού έχουν:

- ΑΜ = ΜΒ, το Μ είναι μέσο του ΑΒ
- $\hat{ΔΑΜ}=\hat{ΜΒΚ}=90^\circ$
- $\hat{Μ}_1=\hat{Μ}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες

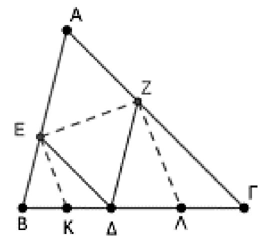
Άρα, είναι και ισεμβαδικά, δηλαδή (ΑΜΔ) = (ΜΚΒ) (1)
Είναι (ΔΚΓ) = (ΔΜΒΓ) + (ΜΚΒ) = (ΔΜΒΓ) + (ΑΜΔ) = (ΑΒΓΔ), λόγω της σχέσης (1) .

$$(ΜΒΓΔ)=(ΔΚΓ)-(ΜΚΒ)=(ΔΚΓ)-\frac{1}{4}(ΔΚΓ)=\frac{3}{4}(ΔΚΓ)=\frac{3}{4}(ΑΒΓΔ).$$

δ) Έστω ότι το τετράγωνο έχει πλευρά α. Τότε $\left(\text{ΑΒΓΔ}\right)=\alpha^2$ και (ΜΒΓΔ) = 75.
Από το ερώτημα γ) έχουμε ότι:

$$75=\frac{3}{4}\alpha^2 \Leftrightarrow 300=3\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=100 \Leftrightarrow \alpha=10 \text{ m}.$$

17956.α) Στο τρίγωνο ΒΕΔ, η ΕΚ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΕΚΔ έχουν ίσες βάσεις ΒΚ και ΚΔ και κοινό ύψος από το Ε. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΒΕΚ) = (ΕΚΔ).



Άρα $\left(\text{ΕΚΔ}\right)=\dfrac{\left(\text{ΒΕΔ}\right)}{2}\ (1)$.

β) Το ΑΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αφού ΔΖ//ΑΕ και ΔΕ//ΑΖ.
Η διαγώνιος ΕΖ του παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ το χωρίζει σε δύο ίσα άρα και ισοδύναμα τρίγωνα, δηλαδή (ΕΖΔ) = (ΑΕΖ). Επομένως

$$\left(\text{ΕΖΔ}\right)=\frac{\left(\text{ΑΕΔΖ}\right)}{2}\ (2).$$

γ) Στο τρίγωνο ΔΖΓ, η ΖΛ είναι διάμεσος, οπότε τα τρίγωνα ΔΖΛ και ΓΖΛ έχουν ίσες βάσεις ΔΛ και ΓΛ και κοινό ύψος από το Ζ. Επομένως τα εμβαδά τους θα είναι ίσα, δηλαδή (ΔΖΛ) = (ΓΖΛ).

Άρα $\left(\text{ΔΖΛ}\right)=\dfrac{\left(\text{ΔΓΖ}\right)}{2}\ (3)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) ,(3) έχουμε:

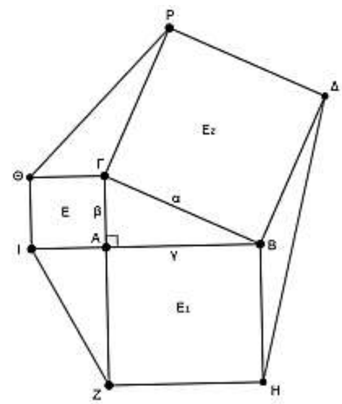
$$\left(\text{ΕΚΔ}\right)+\left(\text{ΕΖΔ}\right)+\left(\text{ΔΖΛ}\right)=\frac{\left(\text{ΒΕΔ}\right)}{2}+\frac{\left(\text{ΑΕΔΖ}\right)}{2}+\frac{\left(\text{ΔΓΖ}\right)}{2}=$$

$$\frac{\left(\text{ΒΕΔ}\right)+\left(\text{ΑΕΔΖ}\right)+\left(\text{ΔΓΖ}\right)}{2}=\frac{\left(\text{ΑΒΓ}\right)}{2}.$$

Επομένως, το εμβαδόν του ΚΕΖΛ θα ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου Δ πάνω στη ΒΓ.

17907.α) Είναι $\text{Ε}_1=4\text{Ε} \Leftrightarrow \text{ΑΒ}^2=4\text{ΑΓ}^2$ και $\text{Ε}_2=5\text{Ε} \Leftrightarrow \text{ΒΓ}^2=5\text{ΑΓ}^2$

Επειδή $\text{ΒΓ}^2=5\text{ΑΓ}^2=4\text{ΑΓ}^2+\text{ΑΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2$,λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.



β) Είναι $\left(AB\Gamma\right)=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma$,

$\left(AIZ\right)=\frac{1}{2}AI\cdot AZ=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma=\left(AB\Gamma\right)$.

Είναι

$AB\Gamma+\Gamma B\Delta+\Delta BH+HBA=360^\circ \Leftrightarrow$

$AB\Gamma+90^\circ+90^\circ+HBA=360^\circ \Leftrightarrow$

$AB\Gamma+HBA=180^\circ$, οπότε

$\frac{\left(BH\Delta\right)}{\left(AB\Gamma\right)}=\frac{BH\cdot B\Delta}{B\Gamma\cdot BA}=\frac{\gamma\cdot\alpha}{\alpha\cdot\gamma}=1\Leftrightarrow$

$\left(BH\Delta\right)=\left(AB\Gamma\right)$,

Είναι $\Theta\Gamma P+P\Gamma B+A\Gamma B+\Theta\Gamma A=360^\circ \Leftrightarrow$

$\Theta\Gamma P+90^\circ+A\Gamma B+90^\circ=360^\circ \Leftrightarrow \Theta\Gamma P+A\Gamma B=180^\circ$, οπότε

$\frac{\left(\Theta\Gamma P\right)}{\left(AB\Gamma\right)}=\frac{\Gamma\Theta\cdot\Gamma P}{\Gamma A\cdot\Gamma B}=\frac{\beta\cdot\alpha}{\beta\cdot\alpha}=1\Leftrightarrow\left(\Theta\Gamma P\right)=\left(AB\Gamma\right)$. Επομένως

$\left(AIZ\right)=\left(BH\Delta\right)=\left(\Theta\Gamma P\right)=\left(AB\Gamma\right)$.

γ) Αν ΑΓ =β =1, τότε $AB^2=4A\Gamma^2=4\Leftrightarrow AB=2$ και

$B\Gamma^2=5A\Gamma^2=5\Leftrightarrow B\Gamma=\sqrt{5}$.

Τότε $\left(AIZ\right)=\left(BH\Delta\right)=\left(\Theta\Gamma P\right)=\left(AB\Gamma\right)=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$.

Ακόμη $E_1=4E=4$, $E_2=5E=5$, οπότε

$\left(ZH\Delta P\Theta I\right)=E+E_1+E_2+\left(AIZ\right)+\left(BH\Delta\right)+\left(\Gamma P\Theta\right)+\left(AB\Gamma\right)\Leftrightarrow$

$\left(ZH\Delta P\Theta I\right)=1+4+5+1+1+1+1=14$.

18101.α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΒΓ. Άρα, οι γωνίες Β και ΒΑΓ θα είναι ίσες, ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΑ είναι ισοσκελή και έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, αφού $B=BA\Gamma$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. Ο λόγος ομοιότητας λ των δύο τριγώνων ισούται με τον λόγο των πλευρών που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες ΒΑΓ και Β αντίστοιχα,

δηλαδή είναι $\dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΔ}}=\dfrac{3}{2}$, οπότε $\dfrac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΒΔΑ})}=\left(\dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΔ}}\right)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$.

18301.α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\text{ΔΑΕ}=\text{ΒΑΓ}$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\frac{2}{5}\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{1}{5}.$$

β) Εργαζόμενοι όπως στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε σε αυτή την περίπτωση:

$\dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\dfrac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\dfrac{\frac{1}{\lambda}\text{ΑΒ}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\dfrac{1}{\mu}$, επομένως ο ζητούμενος λόγος είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ.

γ) Αφού είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ), τότε $\dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\dfrac{1}{\mu}\Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{\mu}\Leftrightarrow \mu=1$.

Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ισεμβαδικά για μ = 1 και για οποιαδήποτε τιμή του λ, αφού, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (β), ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ. Επομένως, υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ, για τα οποία είναι (ΑΔΕ) = (ΑΒΓ). Τα ζεύγη αυτά είναι της μορφής $(\lambda,1)$ με $\lambda\in\mathbb{N}^*$.Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

18370.α) Το εφαπτόμενο τμήμα ΜΓ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΓ. Είναι ΜΟ = ΜΒ+ΒΟ = 2ρ+ρ = 3ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$$\text{ΟΜ}^2=\text{ΟΓ}^2+\text{ΜΓ}^2\Leftrightarrow \text{ΜΓ}^2=\text{ΟΜ}^2-\text{ΟΓ}^2=(3\rho)^2-\rho^2=8\rho^2\Leftrightarrow$$

$$\text{ΜΓ}=2\sqrt{2}\rho.$$

β) i. Τα τρίγωνα ΟΜΓ και ΑΔΜ είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία αντίστοιχα:

$A = \Gamma = 90^\circ$ και την γωνία M κοινή. Επομένως οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Gamma}$	$\hat{M}$ κοινή	$\hat{O} = \hat{\Delta}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΟΜΓ	ΜΟ	ΟΓ	ΜΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΜ	ΜΔ	ΔΑ	ΜΑ

$\frac{M\Delta}{MO} = \frac{MA}{M\Gamma} \Leftrightarrow \frac{M\Delta}{MA} = \frac{MO}{M\Gamma}$.

ii. Δείξαμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΟΜΓ είναι όμοια, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, δηλαδή $\frac{(AM\Delta)}{(OM\Gamma)} = \left(\frac{AM}{\Gamma M}\right)^2 = \frac{AM^2}{\Gamma M^2}$ (1)

ΟΜ = ΜΒ+ΒΟ = λρ+ρ = (λ+1)ρ.

Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΟΓ:

$$\Gamma M^2 = OM^2 - O\Gamma^2 = \left((\lambda+1)\rho\right)^2 - \rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1\right)\rho^2 = \left(\lambda^2 + 2\lambda\right)\rho^2$$

Είναι ΑΜ = 2ρ+λρ= (λ+2)ρ.

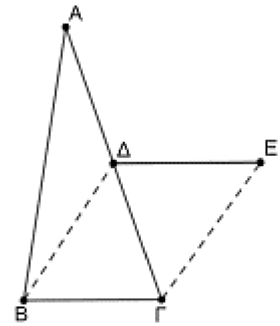
Η (1) γίνεται $\frac{(AM\Delta)}{(OM\Gamma)} = \frac{AM^2}{\Gamma M^2} = \frac{(\lambda+2)^2\rho^2}{(\lambda^2+2\lambda)\rho^2} = \frac{(\lambda+2)^2}{\lambda(\lambda+2)} = \frac{\lambda+2}{\lambda}$.

Αφού (ΑΔΜ) = 9(ΜΟΓ) έχουμε

$$\frac{(AM\Delta)}{(OM\Gamma)} = \frac{9(OM\Gamma)}{(OM\Gamma)} = 9 \Leftrightarrow \frac{\lambda+2}{\lambda} = 9 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 9\lambda \Leftrightarrow 8\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

18371.α) i. Τα τρίγωνα ΔΕΓ και ΑΒΓ έχουν τις γωνίες τους $\Gamma = \Delta$,γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές:

$\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E \cdot \Delta\Gamma}{A\Gamma \cdot B\Gamma} = \frac{\Delta E \cdot \Delta\Gamma}{2\Delta\Gamma \cdot B\Gamma} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$ (1), γιατί από υπόθεση ΑΓ = 2ΔΓ.



ii. Αν ΔΕΓΒ παραλληλόγραμμο, τότε ΔΕ = ΒΓ. Επομένως η (1) γίνεται

$$\frac{(\text{ΔΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΔΕ}}{2\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΒΓ}}{2\text{ΒΓ}}=\frac{1}{2}.$$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΒΔ χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΒΔΓ. Επομένως το καθένα από αυτά θα έχει το μισό εμβαδόν του ΑΒΓ.

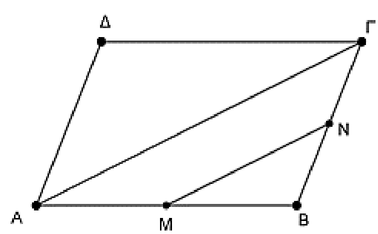
$$\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{1}{2}\ (3).$$

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $(\text{ΔΕΓ})=(\text{ΑΒΔ})$.

β) Ο μαθητής για να αποδείξει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια χρησιμοποιεί το επιχείρημα ότι έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες μία προς μια και τις γωνίες $\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ ίσες. Για να εξασφαλίσουμε όμως την ομοιότητα από το κριτήριο θα έπρεπε οι γωνίες να είναι οι περιεχόμενες των ανάλογων πλευρών, πράγμα το οποίο εδώ δεν συμβαίνει. Οι περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές ΔΕ, ΔΓ και ΑΒ, ΑΓ είναι οι Δ και Α.

21189.α) Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουμε
- ΑΓ είναι κοινή πλευρά.
- ΑΒ = ΓΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- ΒΓ = ΑΔ αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν ίσα εμβαδά, δηλαδή (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) τότε (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΒΓ) = 2(ΑΒΓ) δηλαδή $(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΓΔ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$.



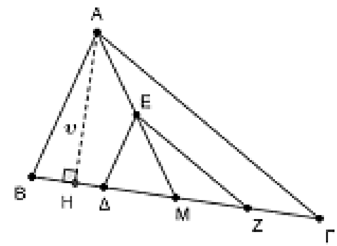
β) Αφού τα Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τότε ΜΑ = ΜΒ = $\frac{\text{ΑΒ}}{2}$ και $\text{ΒΝ}=\text{ΝΓ}=\frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΜΝ και ΑΒΓ έχουν την γωνία Β κοινή, επομένως

$$\frac{(\text{ΒΜΝ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΜΒ}\cdot\text{ΒΝ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{\frac{\text{ΑΒ}}{2}\cdot\frac{\text{ΒΓ}}{2}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{1}{4}.$$

γ) Είναι $\frac{(\mathrm{BMN})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow(\mathrm{BMN})=\frac{1}{4}(\mathrm{AB\Gamma})$. Επειδή από το (α) ερώτημα έχουμε $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})$, ισχύει ότι

$$(\mathrm{BMN})=\frac{1}{4}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma\Delta}).$$



21194.α) Έστω ΑΗ = υ το κοινό ύψος των τριγώνων ΑΜΒ και ΑΜΓ. Έχουμε $(\mathrm{AMB})=\frac{1}{2}\mathrm{BM}\cdot\upsilon$ και $(\mathrm{AM\Gamma})=\frac{1}{2}\Gamma\mathrm{M}\cdot\upsilon$.
Η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ΒΜ = ΜΓ και από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ).
β) Στο τρίγωνο ΑΜΒ το Ε είναι το μέσο της ΑΜ και ΕΔ // ΑΒ, επομένως και το Δ είναι το μέσο της ΒΜ, άρα $\mathrm{M\Delta}=\frac{1}{2}\mathrm{BM}$ και $\mathrm{ME}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}$

Από το (α) ερώτημα έχουμε · (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) = $\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})$.

Τα τρίγωνα ΜΕΔ και ΑΜΒ έχουν την γωνία AMB κοινή, επομένως

$$\frac{(\mathrm{ME\Delta})}{(\mathrm{AMB})}=\frac{\mathrm{ME}\cdot\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{BM}}{\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{ME\Delta})=\frac{1}{4}(\mathrm{AMB})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{8}(\mathrm{AB\Gamma}).$$

γ) Από το (α) ερώτημα είναι (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ) (1), επιπλέον στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι $\mathrm{M\Delta}=\frac{1}{2}\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{MZ}$ συνεπώς η ΕΜ είναι διάμεσος του, άρα (ΜΕΔ) = (ΜΕΖ) (2).
Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) – (2) έχουμε:

$$(\mathrm{AMB})-(\mathrm{ME\Delta})=(\mathrm{AM\Gamma})-(\mathrm{MEZ})\Leftrightarrow(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=(\mathrm{A\Gamma ZE}).$$

18302.α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\mathrm{\Delta AE}=\mathrm{BA\Gamma}$ (ως κατακορυφήν), οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές, δηλαδή:

$$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\frac{2\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=1\Leftrightarrow(\mathrm{A\Delta E})=(\mathrm{AB\Gamma})$$, δηλαδή τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα.

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ κατά τμήματα είναι ΑΔ = μ · ΑΒ και ΑΕ = ν · ΑΓ
αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε θα έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mu\mathrm{AB}\cdot\nu\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}}=\mu\cdot\nu$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ισοδύναμα, θα πρέπει μ · ν = 1.
Επομένως, οι αριθμοί μ και ν είναι αντίστροφοι.

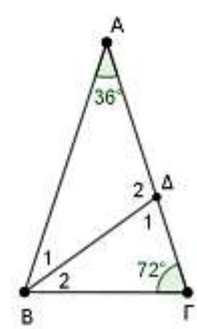
γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\mathrm{\Delta AE}=\mathrm{BA\Gamma}$ (ως κατακορυφήν), οπότε θα είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις προσκείμενες πλευρές σε αυτές τις γωνίες ανάλογες. Επομένως πρέπει:

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Delta}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AE}}\Leftrightarrow\frac{2\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}}=\frac{\frac{3}{2}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\mathrm{AE}=\frac{4}{3}\mathrm{AB}\ \text{ή}$$

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Delta}}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{AE}}{2\mathrm{AB}}=\frac{\frac{3}{2}\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\mathrm{AE}=3\mathrm{AB}.$$

Άρα, τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια όταν $\mathrm{AE}=\frac{4}{3}\mathrm{AB}$ ή $\mathrm{AE}=3\mathrm{AB}$.

18369.α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ, οπότε $\mathrm{B}=\Gamma$.



Είναι $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^\circ\Leftrightarrow 36^\circ+2\mathrm{B}=180^\circ\Leftrightarrow$ $2\mathrm{B}=144\Leftrightarrow\mathrm{B}=\Gamma=72^\circ$.
Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β , οπότε
$\mathrm{B}_1=\mathrm{B}_2=36^\circ$, άρα $\mathrm{A}=\mathrm{B}_1$ και το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΒΔ.
Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΒ, οπότε
$\Delta_1=\mathrm{A}+\mathrm{B}_1=72^\circ$ επομένως το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με ΒΔ = ΒΓ.

i. Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή και $\mathrm{A}=\mathrm{B}_2=36^\circ$, επομένως είναι όμοια, διότι έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

ii. Οι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\Gamma}$ κοινή	$\hat{B}_2 = \hat{A}$	$\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΒΔΓ	ΒΔ	ΔΓ	ΒΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ	ΒΓ	ΑΓ

οπότε $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB}$.

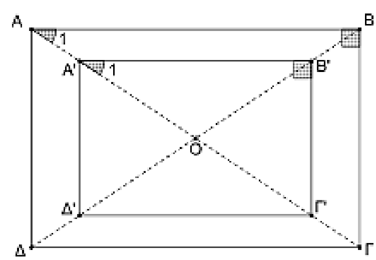
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΒΓ έχουν τις γωνίες Δ_1, Δ_2 παραπληρωματικές. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες, δηλαδή

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot B\Delta}{\Delta\Gamma \cdot B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow 3 = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = 3\Delta\Gamma .$$

Το Δ θα χωρίζει το ΑΓ σε δύο τμήματα ΑΔ και ΔΓ με λόγο 3:1.

20678.α) Αφού το ορθογώνιο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, είναι $(AB\Gamma\Delta) = 2(A'B'\Gamma'\Delta') \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = 2$.

Αν είναι λ ο λόγος ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τότε $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \lambda^2$, άρα $\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}$.



β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $A_1 = A_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, Α΄Β΄ που τέμνονται από την ΑΓ και $B = B' = 90^\circ$. Επομένως τα δύο τρίγωνα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) i. Από το ερώτημα α) έχουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των δύο ορθογωνίων είναι $\lambda = \sqrt{2}$, οπότε $\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{2}$.

Επιπλέον, από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουμε ότι
$\frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$, άρα $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{40}{A'\Gamma'}=\sqrt{2}\Leftrightarrow$
$A'\Gamma'=\frac{40}{\sqrt{2}}=\frac{40\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}$, δηλαδή η διαγώνιος της φωτογραφίας έχει μήκος $20\sqrt{2}$ cm.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι ίσες, οπότε
$O A'=OB'=O\Gamma'=O\Delta'=\frac{A'\Gamma'}{2}=10\sqrt{2}$.

Είναι $A'\widehat{O}B'=\Gamma'\widehat{O}\Delta'=120^\circ$ ως κατακορυφήν. Για το εμβαδόν των τριγώνων ΟΑ΄Β΄ και ΟΓ΄Δ΄ ισχύει

$$(OA'B')=\frac{1}{2}OA'\cdot OB'\eta\mu 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$$ και

$$(O\Gamma'\Delta')=\frac{1}{2}O\Gamma'\cdot O\Delta'\eta\mu 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}.$$

Είναι $A'\widehat{O}\Delta'=\Gamma'\widehat{O}B'=60^\circ$ ως παραπληρωματικές της γωνίας $A'\widehat{O}B'$.

Είναι $(OA'\Delta')=\frac{1}{2}OA'\cdot O\Delta'\eta\mu 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$ και

$$(OB'\Gamma')=\frac{1}{2}OB'\cdot O\Gamma'\eta\mu 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}.$$

Το εμβαδόν της φωτογραφίας είναι

$$(A'B'\Gamma'\Delta')=(OA'B')+(O\Gamma'\Delta')+(OA'\Delta')+(OB'\Gamma')\Leftrightarrow$$
$$(A'B'\Gamma'\Delta')=4\cdot 50\sqrt{3}=200\sqrt{3}\,\text{cm}^2.$$

21839.α) Είναι $B\widehat{A}\Gamma+E\widehat{A}Z=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$ άρα οι γωνίες ΒΑΓ και ΕΑΖ είναι παραπληρωματικές. Γνωρίζουμε όμως ότι αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα
$\frac{(AB\Gamma)}{(EAZ)}=\frac{AB\cdot A\Gamma}{AE\cdot AZ}=1$ οπότε (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ).

β) i. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι (ΑΒΓ)=(ΕΑΖ) και από υπόθεση είναι (ΕΖΗΓΒΔ)=54.

Είναι $(\text{ΑΒΓ})+(\text{ΑΒΔΕ})+(\text{ΑΕΖ})+(\text{ΑΓΗΖ})=(\text{ΕΖΗΓΒΔ})\Leftrightarrow$

$(\text{ΑΒΓ})+36+(\text{ΑΒΓ})+9=54\Leftrightarrow 2(\text{ΑΒΓ})=9\Leftrightarrow(\text{ΑΒΓ})=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓημΑ}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 6\cdot 3\text{ημΑ}=9\Leftrightarrow \text{ημΑ}=\dfrac{9}{18}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \text{Α}=30^\circ$.

ii. Από νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$\text{ΒΓ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΑΓ}^2-2\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{συν}30^\circ=6^2+3^2-2\cdot 6\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=45-18\sqrt{3}$.

Άρα το εμβαδόν του ζητούμενου τετραγώνου είναι

$\text{Ε}=\text{ΒΓ}^2=45-18\sqrt{3}$ cm².

22023.α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν $\text{Β}=\text{ΑΔΕ}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ) και κοινή τη γωνία Α. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{\text{Α}}$ κοινή	$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ}=\hat{\text{Γ}}$	$\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Ε}=\hat{\text{Β}}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΒ	ΑΓ

Δίνεται ότι το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ. Επομένως, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι: $\lambda=\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\dfrac{\text{ΑΔ}}{2\text{ΑΔ}}=\dfrac{1}{2}$.

Αφού τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, δηλαδή:

$\dfrac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\lambda^2=\dfrac{1}{4}$.

γ) Ζητάμε τη θέση του σημείου Δ ώστε να είναι . Είναι

$$\frac{(\Delta\text{ΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow\frac{(\Delta\text{ΑΓ})-(\text{Α}\Delta\text{Ε})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow\frac{(\Delta\text{ΑΓ})}{(\text{ΑΒΓ})}-\frac{(\text{Α}\Delta\text{Ε})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}-\lambda^2=\frac{2}{9}\Leftrightarrow\lambda-\lambda^2=\frac{2}{9}\Leftrightarrow 9\lambda^2-9\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}\text{ ή }\lambda=\frac{1}{3}.$$

Άρα, το σημείο Δ χωρίζει εσωτερικά την πλευρά ΑΒ σε λόγο λ τέτοιο ώστε: $\frac{\text{Α}\Delta}{\text{ΑΒ}}=\frac{2}{3}$ ή $\frac{\text{Α}\Delta}{\text{ΑΒ}}=\frac{1}{3}$.

22150.α) i. Το Ε είναι μέσο της ΑΓ, άρα $\text{ΓΕ}=\frac{1}{2}\text{ΑΓ}\Leftrightarrow\frac{\text{ΓΕ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{1}{2}$. Όμοια

$\Gamma\Delta=\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\Leftrightarrow\frac{\Gamma\Delta}{\text{ΒΓ}}=\frac{1}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, εφόσον η Γ είναι κοινή γωνία.

Επομένως τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας τον λόγο των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{1}{2}$.

ii. Άρα τα εμβαδά (ΕΔΓ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΕΔΓ και ΑΒΓ αντίστοιχα έχουν λόγο ίσο με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Επομένως: $\frac{(\text{Ε}\Delta\Gamma)}{(\text{ΑΒΓ})}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow(\text{Ε}\Delta\Gamma)=\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$.

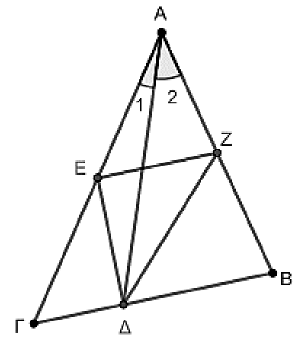
Τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΓ είναι επίσης όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$, αφού το Ζ είναι μέσο της ΑΒ και το Δ είναι μέσο της ΒΓ και έχουν τη γωνία Β κοινή. Επομένως: $\frac{(\text{ΖΒ}\Delta)}{(\text{ΑΒΓ})}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow(\text{ΖΒ}\Delta)=\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})$.

Είναι $(\text{ΑΕ}\Delta\text{Ζ})=(\text{ΑΒΓ})-(\text{Ε}\Delta\Gamma)-(\text{ΖΒ}\Delta)\Leftrightarrow(\text{ΑΕ}\Delta\text{Ζ})=(\text{ΑΒΓ})-2(\text{Ε}\Delta\Gamma)$

iii. $(\text{ΑΕ}\Delta\text{Ζ})=(\text{ΑΒΓ})-2(\text{Ε}\Delta\Gamma)\Leftrightarrow$

$$(\text{ΑΕ}\Delta\text{Ζ})=(\text{ΑΒΓ})-2\cdot\frac{1}{4}(\text{ΑΒΓ})=(\text{ΑΒΓ})-\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒΓ}).$$

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ με το τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ.



Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΓ έχουν κοινή γωνία την $\mathrm{A}_1 = \Delta\mathrm{AE}$, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{A\Delta\Gamma})} = \frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{A\Delta E}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Delta\Gamma}).$$

Όμοια προκύπτει ότι $(\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Delta B})$. Είναι

$$(\mathrm{AE\Delta Z}) = (\mathrm{A\Delta E}) + (\mathrm{A\Delta Z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{A\Delta\Gamma}) + \frac{1}{2}(\mathrm{A\Delta B}) \Leftrightarrow$$

$$(\mathrm{AE\Delta Z}) = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{A\Delta\Gamma}) + (\mathrm{A\Delta B})\right] = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma}).$$

Άρα το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το 1/2 του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

22141.α) Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος τους Θαλή το τρίγωνο ΑΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ του τριγώνου ΑΔΕ και την ΒΓ, παράλληλη προς τη ΔΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΔΕ. Άρα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια, με:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Delta}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{E}}.$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, αν ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσος με λ , τότε:

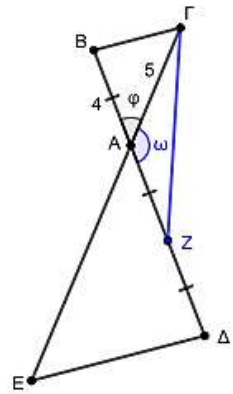
$$\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A\Delta E})} = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

β) Είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\cdot\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}4\cdot 5\cdot\eta\mu\varphi = 10\eta\mu\varphi$, οπότε

$$\frac{10\eta\mu\varphi}{(\mathrm{A\Delta E})} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\mathrm{A\Delta E}) = 40\eta\mu\varphi.$$

γ) Είναι $\left(\text{ΑΓΖ}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\text{ΑΔΕ}\right)\Leftrightarrow\left(\text{ΑΓΖ}\right)=\left(\text{ΑΒΓ}\right)\Leftrightarrow\dfrac{\left(\text{ΑΓΖ}\right)}{\left(\text{ΑΒΓ}\right)}=1$.

Επίσης οι γωνίες φ και ω , των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών (ΑΒΓ) και (ΑΓΖ) των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΖ αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:



$$\frac{\left(\text{ΑΓΖ}\right)}{\left(\text{ΑΒΓ}\right)}=\frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΑΖ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΖ}}=1\Leftrightarrow$$

$\text{ΑΒ}=\text{ΑΖ}\Leftrightarrow\text{ΑΖ}=\dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$, εφόσον οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ είναι ομόλογες σε όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ με λόγο ομοιότητας $\lambda=\dfrac{1}{2}$ (από το α)).

Επομένως το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ του τριγώνου ΑΔΕ.

22148.α) i. Σύμφωνα με εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ, παράλληλη προς τη ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, με:

$$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}}.$$

Ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι:

$$\lambda=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{3\text{ΑΕ}}=\frac{1}{3}.$$

Επειδή ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, ο λόγος των εμβαδών (ΑΔΕ) και (ΑΒΓ) των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ αντίστοιχα είναι:

$$\frac{\left(\text{ΑΔΕ}\right)}{\left(\text{ΑΒΓ}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}.$$

ii. Οι γωνίες Α_1 και Α_2 των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ αντίστοιχα είναι παραπληρωματικές. Επομένως ο λόγος των εμβαδών τους (ΑΔΕ) και (ΑΔΖ) αντίστοιχα είναι ίσος με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Δηλαδή:

$$\frac{\left(\text{ΑΔΕ}\right)}{\left(\text{ΑΔΖ}\right)}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΖ}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΖ}}=1\Leftrightarrow\left(\text{ΑΔΕ}\right)=\left(\text{ΑΔΖ}\right).$$

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ ισχύει ότι
$(\Delta\mathrm{EZ})=(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})+(\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z})=2(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})$, επομένως:

$$\frac{(\Delta\mathrm{EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{2(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=2\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow(\Delta\mathrm{EZ})=\frac{2}{9}(\mathrm{AB\Gamma}).$$

β) Έστω $\lambda=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}$.Τότε με όμοιους συλλογισμούς με το ερώτημα α) έχουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο λ και για τα εμβαδά τους ισχύει ότι $\frac{(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\lambda^2$.

Επίσης, εφόσον ΑΕ = ΑΖ τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν ίσα εμβαδά, ανεξάρτητα από την τιμή του λόγου λ και
$(\Delta\mathrm{EZ})=(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})+(\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z})=2(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})$ όπως στο α)ii). Άρα:

$$\frac{(\Delta\mathrm{EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=\frac{2(\mathrm{A}\Delta\mathrm{E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=2\lambda^2\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{AB\Gamma})}=2\lambda^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}=2\lambda^2\Leftrightarrow\lambda^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

. Άρα $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{2}$.

22243.α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε ότι

$$\mathrm{BZ}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AZ}^2=\mathrm{AB}^2+\left(\frac{3}{4}\mathrm{AB}\right)^2=\mathrm{AB}^2+\frac{9}{16}\mathrm{AB}^2=\frac{25}{16}\mathrm{AB}^2\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{BZ}=\frac{5}{4}\mathrm{AB}.$$

β) Αφού το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, θα είναι ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ. Επιπλέον

$$\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta-\mathrm{AZ}=\mathrm{AB}-\frac{3}{4}\mathrm{AB}=\frac{1}{4}\mathrm{AB}.$$

i. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε ότι

$$\mathrm{BE}^2=\mathrm{B\Gamma}^2+\Gamma\mathrm{E}^2=\mathrm{AB}^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2=\mathrm{AB}^2+\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2=\frac{5}{4}\mathrm{AB}^2.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε ότι

$$\mathrm{ZE}^2=\Delta\mathrm{Z}^2+\Delta\mathrm{E}^2=\left(\frac{1}{4}\mathrm{AB}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\right)^2=\frac{1}{16}\mathrm{AB}^2+\frac{1}{4}\mathrm{AB}^2=\frac{5}{16}\mathrm{AB}^2.$$

ii. Από το ερωτήματα α και βi έχουμε ότι

$$BE^2+ZE^2=\frac{5}{4}AB^2+\frac{5}{16}AB^2=\frac{25}{16}AB^2=BZ^2$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο με

$$\widehat{BEZ}=90^\circ.$$

γ) Είναι $\frac{BE}{B\Gamma}=\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}AB}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{ZE}{E\Gamma}=\frac{\sqrt{\frac{5}{16}}AB}{\frac{1}{2}AB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ έχουν $\frac{BE}{B\Gamma}=\frac{ZE}{E\Gamma}$ και $\widehat{BEZ}=\widehat{B\Gamma E}=90^\circ$, άρα είναι όμοια, γιατί έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες. Ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, οπότε

$$\frac{(BEZ)}{(B\Gamma E)}=\left(\frac{BE}{B\Gamma}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

22260.α) Είναι $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma\cdot \eta\mu 150^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=6$

β) Από τα δεδομένα είναι $\Gamma\Delta=\frac{1}{2}\Gamma A$ και $\Gamma E=\frac{2}{3}\Gamma B$.

Τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΑΒΓ έχουν τη γωνία Γ κοινή. Άρα ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν την κοινή γωνία Γ. Δηλαδή:

$$\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{\Gamma\Delta\cdot\Gamma E}{\Gamma A\cdot\Gamma B}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma A\cdot\frac{2}{3}\Gamma B}{\Gamma A\cdot\Gamma B}=\frac{1}{3}.$$

γ) Είναι $\frac{(\Gamma\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{(\Gamma\Delta E)}{6}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow(\Gamma\Delta E)=\frac{6}{3}=2$.

22340.α) i)Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΚΔ έχουν την $\widehat{KA\Delta}$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$$\frac{(AO\Delta)}{(AK\Delta)}=\frac{AO\cdot A\Delta}{AK\cdot A\Delta}=\frac{AO}{AK}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow(AO\Delta)=\frac{3}{4}(AK\Delta).$$

ii) Τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΚΕ έχουν την $\hat{ΚΑΕ}$ κοινή γωνία, άρα ο λόγος των εμβαδών τους, είναι ίσος με
το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία αυτή. Επομένως

$$\frac{(ΑΟΕ)}{(ΑΚΕ)}=\frac{ΑΟ\cdot ΑΕ}{ΑΚ\cdot ΑΕ}=\frac{ΑΟ}{ΑΚ}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow (ΑΟΕ)=\frac{3}{4}(ΑΚΕ).$$

iii) Είναι $(ΑΔΕ)=(ΑΟΔ)+(ΑΟΕ)=\frac{3}{4}(ΑΚΔ)+\frac{3}{4}(ΑΚΕ)\Leftrightarrow$

$$(ΑΔΕ)=\frac{3}{4}\left[(ΑΚΔ)+(ΑΚΕ)\right]=\frac{3}{4}(ΑΔΚΕ).$$

β) Το τετράπλευρο ΑΔΚΕ περιέχεται στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, άρα το εμβαδόν του είναι μικρότερο του εμβαδού του ΑΒΓ, δηλαδή

$$(ΑΔΚΕ)<(ΑΒΓ)\Leftrightarrow \frac{3}{4}(ΑΔΚΕ)<\frac{3}{4}(ΑΒΓ)\Leftrightarrow (ΑΔΕ)<\frac{3}{4}(ΑΒΓ).$$

Επομένως δεν ισχύει $(ΑΔΕ)=\frac{3}{4}(ΑΒΓ)$.

22375.α) i) Στα τρίγωνα ΑΛΓ και ΓΛΚ οι γωνίες $\hat{ΑΛΓ}$ και $\hat{ΓΛΚ}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως $\frac{E_1}{E_2}=\frac{ΛΓ\cdot ΛΑ}{ΛΓ\cdot ΛΚ}=\frac{ΛΑ}{ΛΚ}=\frac{2ΛΚ}{ΛΚ}=2$ (1).

Στα τρίγωνα ΑΛΒ και ΒΛΚ οι γωνίες $\hat{ΑΛΒ}$ και $\hat{ΒΛΚ}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως $\frac{E_4}{E_3}=\frac{ΛΒ\cdot ΛΑ}{ΛΒ\cdot ΛΚ}=\frac{ΛΑ}{ΛΚ}=\frac{2ΛΚ}{ΛΚ}=2$ (2).

ii) Στα τρίγωνα ΒΛΚ και ΓΛΚ οι γωνίες $\hat{ΛΚΒ}$ και $\hat{ΛΚΓ}$ είναι παραπληρωματικές, άρα ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Επομένως $\frac{E_3}{E_2}=\frac{ΚΛ\cdot ΚΒ}{ΚΛ\cdot ΚΓ}=\frac{ΚΒ}{ΚΓ}=\frac{2ΚΓ}{ΚΓ}=2$ (3).

Από τις (1) και (3) έχουμε $\frac{E_1}{E_2}=\frac{E_3}{E_2}\Leftrightarrow E_1=E_3$ (4).

β) Από την (1) έχουμε $\frac{E_1}{E_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{10}{E_2} = 2 \Leftrightarrow E_2 = 5$. Από την (4) έχουμε $E_3 = E_1 = 10$.

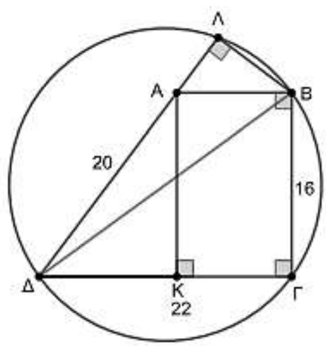
Από την (2) έχουμε $\frac{E_4}{E_3} = 2 \Leftrightarrow \frac{E_4}{10} = 2 \Leftrightarrow E_4 = 20$.

Επομένως $(\text{ΑΒΓΔ}) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 10 + 5 + 10 + 20 = 45$.

22380.α) i) Το τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, άρα ΑΚ = ΒΓ = 16.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ έχουμε:
$\text{ΚΔ}^2 = \text{ΑΔ}^2 - \text{ΑΚ}^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144 \Leftrightarrow$ ΚΔ = 12.

ii) Είναι $(\text{ΑΚΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΚΔ} \cdot \text{ΑΚ} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$.

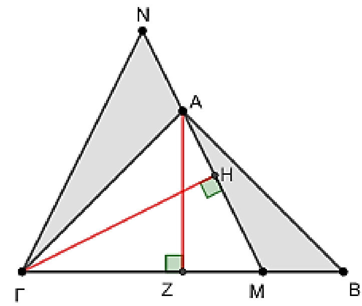
β) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι ορθογώνια και έχουν $\Delta = \text{ΛΑΒ}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΛΔ. Άρα τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας τους είναι $\lambda = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{20}{10} = 2$ αφού ΒΑ = ΚΓ από το ορθογώνιο ΑΒΓΚ και ΚΓ = ΓΔ – ΚΔ = 22-12 = 10.



Επειδή τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΒΛΑ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ=2, ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων και ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας, άρα

$$\frac{(\text{ΑΚΔ})}{(\text{ΒΛΑ})} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{96}{(\text{ΒΛΑ})} = 4 \Leftrightarrow 4(\text{ΒΛΑ}) = 96 \Leftrightarrow (\text{ΒΛΑ}) = 24.$$

γ) Φέρνουμε τη ΒΔ, η οποία είναι διάμετρος του παραπάνω κύκλου, αφού $\text{ΒΓΔ} = 90^\circ$.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε:
$\text{ΒΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2 + \text{ΓΔ}^2 = 16^2 + 22^2 = 256 + 484 = 740 \Leftrightarrow$
$\text{ΒΔ} = \sqrt{740} = \sqrt{4 \cdot 185} = 2\sqrt{185}$
Επομένως η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου ΒΓΔΛ έχει μήκος $2\sqrt{185}$.



22404.α) i. Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, το ΑΖ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = \frac{1}{3}$ (1).

ii. Είναι $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}-\text{ΝΑ}} = \frac{1}{4-1} \Leftrightarrow$ $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$.

iii. Τα τρίγωνα ΑΝΓ και ΑΜΓ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Γ, το ΓΗ, επομένως ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή $\frac{(\text{ΑΝΓ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΑΜ}} = \frac{1}{3}$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\frac{(\text{ΑΜΒ})}{(\text{ΑΜΓ})} = \frac{(\text{ΑΝΓ})}{(\text{ΑΜΓ})} \Leftrightarrow$

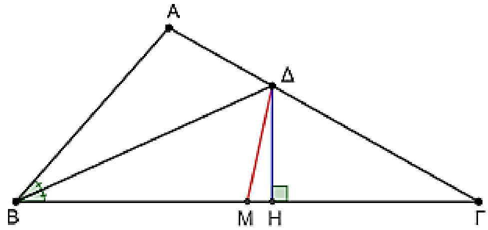
$(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$.

β) Είναι $\frac{\text{ΜΒ}}{\text{ΜΓ}} = 1$, άρα το Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε (ΑΜΒ) = (ΑΜΓ), αφού έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος ΑΖ. Όμως $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΝΓ})$, άρα $(\text{ΑΜΓ}) = (\text{ΑΝΓ})$ και αφού έχουν το ίδιο ύψος ΓΗ, θα έχουν ίσες τις αντίστοιχες βάσεις ΝΑ = ΑΜ. Επομένως το Α είναι το μέσο του ΝΜ άρα $\frac{\text{ΝΑ}}{\text{ΝΜ}} = \frac{1}{2}$.

22406.α) Στα τρίγωνα ΔΒΓ και ΑΒΔ οι γωνίες $\hat{\text{ΔΒΓ}}$ και $\hat{\text{ΑΒΔ}}$ είναι ίσες, αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β του τριγώνου . Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\text{ΔΒΓ})}{(\text{ΑΒΔ})} = \frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΒΓ}}{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΒΑ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΑ}} = \frac{2\text{ΒΑ}}{\text{ΒΑ}} = 2 \Leftrightarrow (\text{ΔΒΓ}) = 2(\text{ΑΒΔ}).$$

β) Έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Τότε η διάμεσος ΔΜ του τριγώνου ΔΒΓ το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΜΓ, αφού αυτά έχουν ίσες βάσεις ΜΒ = ΜΓ και κοινό ύψος το ΔΗ από την κορυφή Δ. Επομένως



$$(\Delta\text{MB}) = (\Delta\text{M}\Gamma) = \frac{1}{2}(\Delta\text{B}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot 2(\text{AB}\Delta) = (\text{AB}\Delta),$$

άρα $(\text{AB}\Delta) = (\Delta\text{MB}) = (\Delta\text{M}\Gamma)$.

γ) i. Είναι $(\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot \text{B}\Gamma \cdot \text{BA} \cdot \eta\mu\text{B} = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 12\cdot \frac{3}{4} = 108$.

ii. Είναι $(\Delta\text{B}\Gamma) + (\text{AB}\Delta) = (\text{AB}\Gamma) \Leftrightarrow 2(\text{AB}\Delta) + (\text{AB}\Delta) = 108 \Leftrightarrow$

$3(\text{AB}\Delta) = 108 \Leftrightarrow (\text{AB}\Delta) = 36$ και $(\Delta\text{B}\Gamma) = 2\cdot 36 = 72$.

22407α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ έχουμε:

$\Gamma\text{K}^2 = \text{A}\Gamma^2 - \text{AK}^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144 \Leftrightarrow \Gamma\text{K} = 12$.

Είναι $(\text{AB}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot \text{AB}\cdot \Gamma\text{K} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12 = 60$.

ii. Στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ οι γωνίες ΔAB και $\Delta\text{A}\Gamma$ είναι ίσες, αφού η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Άρα

$$\frac{(\text{A}\Delta\text{B})}{(\text{A}\Delta\Gamma)} = \frac{\text{A}\Delta\cdot\text{AB}}{\text{A}\Delta\cdot\text{A}\Gamma} = \frac{\text{AB}}{\text{A}\Gamma} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\text{A}\Delta\text{B}) = \frac{2}{3}(\text{A}\Delta\Gamma).$$

Είναι $(\text{A}\Delta\text{B}) + (\text{A}\Delta\Gamma) = (\text{AB}\Gamma) \Leftrightarrow \frac{2}{3}(\text{A}\Delta\Gamma) + (\text{A}\Delta\Gamma) = 60 \Leftrightarrow$

$2(\text{A}\Delta\Gamma) + 3(\text{A}\Delta\Gamma) = 180 \Leftrightarrow 5(\text{A}\Delta\Gamma) = 180 \Leftrightarrow (\text{A}\Delta\Gamma) = 36$ και

$(\text{A}\Delta\text{B}) = \frac{2}{3}\cdot 36 = 24$.

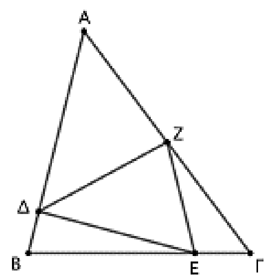
β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν κοινή βάση την ΑΒ και αντίστοιχα ύψη ΔΛ και ΓΚ, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, δηλαδή

$$\frac{(\text{ΑΔΒ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΓΚ}}\Leftrightarrow\frac{24}{60}=\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΓΚ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΓΚ}}=\frac{2}{5}$$

ii. Οι ευθείες ΔΛ και ΓΚ είναι παράλληλες, ως κάθετες στην ευθεία ΑΒ. Επομένως τα τρίγωνα ΔΛΒ και ΓΚΒ έχουν πλευρές ανάλογες, άρα

$$\frac{\text{ΛΒ}}{\text{ΚΒ}}=\frac{\text{ΔΛ}}{\text{ΓΚ}}\Leftrightarrow\frac{\text{ΛΒ}}{\text{ΚΒ}}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{\text{ΛΒ}}{\text{ΚΒ}-\text{ΛΒ}}=\frac{2}{5-2}=\frac{2}{3}.$$

3ο Θέμα



19037.α) Τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Β σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\text{ΔΒΕ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΒΔ}\cdot\text{ΒΕ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{\frac{1}{5}\text{ΑΒ}\cdot\frac{3}{4}\text{ΒΓ}}{\text{ΒΑ}\cdot\text{ΒΓ}}=\frac{3}{20}\Leftrightarrow$$

$$(\text{ΔΒΕ})=\frac{3}{20}(\text{ΑΒΓ})\ (1).$$

Τα τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Γ. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Γ σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\text{ΕΓΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΕΓ}\cdot\text{ΓΖ}}{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{\frac{1}{4}\text{ΒΓ}\cdot\frac{1}{2}\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow(\text{ΕΓΖ})=\frac{1}{8}(\text{ΑΒΓ})\ (2).$$

Τα τρίγωνα ΖΑΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α. Οπότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Α σε καθένα από τα τρίγωνα. Έτσι είναι:

$$\frac{(\text{ΖΑΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΖ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{\frac{4}{5}\text{ΑΒ}\cdot\frac{1}{2}\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow(\text{ΖΑΔ})=\frac{2}{5}(\text{ΑΒΓ})\ (3)$$

β) Από το σχήμα έχουμε ότι:
(ΑΒΓ) = (ΔΒΕ) + (ΕΓΖ) + (ΖΑΔ) + (ΔΕΖ)

$$\overset{(1),(2),(3)}{=} \frac{3}{20}\left(\text{ΑΒΓ}\right)+\frac{1}{8}\left(\text{ΑΒΓ}\right)+\frac{2}{5}\left(\text{ΑΒΓ}\right)+\left(\text{ΔΕΖ}\right)\Leftrightarrow$$

$$120=\frac{3}{20}120+\frac{1}{8}120+\frac{2}{5}120\Leftrightarrow 120=18+15+48+\left(\text{ΔΕΖ}\right)\Leftrightarrow$$

$\left(\text{ΔΕΖ}\right)=39$.

Κανονικά πολύγωνα

Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

2ο Θέμα

20638.α) Είναι $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \nu_2=2\nu_1$ και $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\frac{360^\circ}{\nu_1}}{\frac{360^\circ}{\nu_2}}=\frac{\nu_2}{\nu_1}=2$

β) $\nu_1=5$ και $\nu_2=2\cdot 5=10$, οπότε $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{180^\circ-\frac{360^\circ}{5}}{180^\circ-\frac{360^\circ}{10}}=\frac{108^\circ}{144^\circ}=\frac{3}{4}$

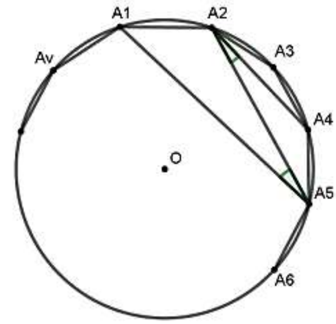
21841.α) i. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60ο το καθένα. Επειδή το τόξο ΑΓΔ ισούται με 3· 60ο =180ο , είναι ημικύκλιο και άρα η ΑΔ είναι διάμετρος του κύκλου.

ii. Οι γωνίες $\Gamma\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z}$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα 60ο το καθένα , άρα είναι ίσες.

iii. Οι γωνίες $\Gamma\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z}$ είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΑΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΑΔ και εφόσον, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ίσες οι ευθείς ΑΓ και ΔΖ είναι παράλληλες.

iv. Οι κορυφές του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ χωρίζουν τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα μέτρου 60ο το καθένα. Η γωνία Γ του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο ΔΕΑ που είναι ίσο με 3· 60ο =180ο και εφόσον κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει, προκύπτει ότι είναι ορθή. Για τον ίδιο λόγο και οι υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΔΖ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 180ο , άρα είναι ορθές. Επομένως το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο. Η ΑΖ είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο, R), άρα ΑΖ=λ_6=R. Η ΑΓ είναι χορδή που αντιστοιχεί σε τόξο 120ο , άρα ισούται με την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Ο,R). Είναι $\mathrm{A}\Gamma=\lambda_3=\mathrm{R}\sqrt{3}$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$(\mathrm{A}\Gamma\Delta\mathrm{Z})=\mathrm{AZ}\cdot\mathrm{A}\Gamma=\mathrm{R}\cdot\mathrm{R}\sqrt{3}=\mathrm{R}^2\sqrt{3}$.



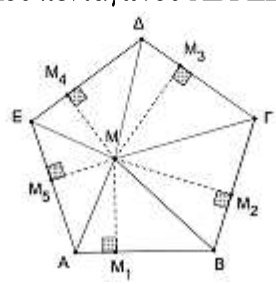
β) Έστω ένα κανονικό ν-γωνο $A_1A_2\ldots A\nu$, (ν>5).
Γνωρίζουμε ότι κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου. Δύο διαγώνιοι του πολυγώνου είναι οι A_2A_4 και A_1A_5 οι οποίες είναι χορδές του κύκλου στις οποίες περιέχονται τα τόξα A_1A_2 και A_4A_5. Το κάθε ένα από αυτά τα τόξα είναι ίσο με $\frac{360^\circ}{\nu}$, άρα είναι ίσα. Οι γωνίες $A_4A_2A_5$ και $A_2A_5A_1$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, άρα είναι ίσες, επομένως $A_2A_4//A_1A_5$ αφού σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

4ο Θέμα

22099.α) i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ με βάση ΑΒ και αντίστοιχο ύψος το MM_1 είναι

$$(AB M)=\frac{1}{2}AB\cdot MM_1=\frac{1}{2}\lambda_5\cdot MM_1$$

Για το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ έχουμε:



$$(AB\Gamma\Delta E)=(ABM)+(B\Gamma M)+(\Gamma\Delta M)+(\Delta EM)+(EAM)=$$

$$\frac{1}{2}\lambda_5\cdot MM_1+\frac{1}{2}\lambda_5\cdot MM_2+\frac{1}{2}\lambda_5\cdot MM_3+\frac{1}{2}\lambda_5\cdot MM_4+\frac{1}{2}\lambda_5\cdot MM_5=$$

$$.\frac{1}{2}\lambda_5\left(MM_1+MM_2+MM_3+MM_4+MM_5\right)(1).$$

iii. Το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι

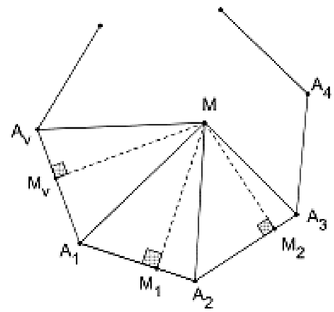
$$\left(\text{ΑΒΓΔΕ}\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\lambda_5\cdot\alpha_5\ (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\lambda_5\left(\text{ΜΜ}_1+\text{ΜΜ}_2+\text{ΜΜ}_3+\text{ΜΜ}_4+\text{ΜΜ}_5\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\lambda_5\cdot\alpha_5 \Leftrightarrow$$

$$\text{ΜΜ}_1+\text{ΜΜ}_2+\text{ΜΜ}_3+\text{ΜΜ}_4+\text{ΜΜ}_5=5\alpha_5$$

β) Φέρουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΑ_1, $\text{ΜΑ}_2,\ldots,\text{ΜΑ}_\nu$.
Για το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $\text{Α}_1\text{Α}_2\ldots\text{Α}_\nu$ έχουμε:



$$\left(\text{Α}_1\text{Α}_2\ldots\text{Α}_\nu\right)=\left(\text{Α}_1\text{Α}_2\text{Μ}\right)+\left(\text{Α}_2\text{Α}_3\text{Μ}\right)+\ldots+\left(\text{Α}_\nu\text{Α}_1\text{Μ}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\lambda_\nu\cdot\text{ΜΜ}_1+\frac{1}{2}\lambda_\nu\cdot\text{ΜΜ}_2+\ldots+\frac{1}{2}\lambda_\nu\cdot\text{ΜΜ}_\nu=$$

$$\frac{1}{2}\lambda_\nu\left(\text{ΜΜ}_1+\text{ΜΜ}_2+\ldots+\text{ΜΜ}_\nu\right)\ (3).$$

Όμως το εμβαδόν του κανονικού ν-γώνου $\text{Α}_1\text{Α}_2\ldots\text{Α}_\nu$ δίνεται από τον τύπο $\left(\text{Α}_1\text{Α}_2\ldots\text{Α}_\nu\right)=\frac{1}{2}\cdot\nu\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu$ (4).

Από τις ισότητες (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\lambda_\nu\left(\text{ΜΜ}_1+\text{ΜΜ}_2+\ldots+\text{ΜΜ}_\nu\right)=\frac{1}{2}\cdot\nu\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu \Leftrightarrow$$

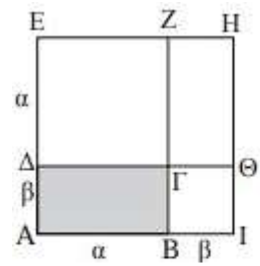
$$\text{ΜΜ}_1+\text{ΜΜ}_2+\ldots+\text{ΜΜ}_\nu=\nu\alpha_\nu\ .$$

1ο Θέμα

α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β . Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=α, την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha + \beta)^2$ (1).



Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε (ΔΓΖΕ)=α^2, (ΒΙΘΓ) = β^2 και (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) (2)

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΘΗΖ}) + (\text{ΒΙΘΓ}) + (\text{ΔΓΖΕ}),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ}) + \alpha^2 + \beta^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση (ΑΒΓΔ) = α • β.

21975.α) i. Σωστό ii. Λάθος iii. Σωστό iv. Λάθος v. Σωστό

β) Θεώρημα ΙΙΙ σελίδα 82.

Μήκος κύκλου - τόξου

2ο Θέμα

21122.α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.
Επομένως είναι $Α\Delta^2 = Β\Delta \cdot \Delta\Gamma = 1 \cdot 4 = 4 \Leftrightarrow Α\Delta = 2$.

β) Το μήκος του τόξου είναι $\ell = \dfrac{\pi\rho\mu}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot 2 \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \pi$.

21298.α) Το μήκος του κύκλου (Κ,ρ) είναι $L = 2\pi\rho$, άρα
$\rho = \dfrac{L}{2\pi} = \dfrac{10\pi}{2\pi} = 5$.

β) i. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει κάθετες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και υποτείνουσα τη ΒΓ, που είναι διάμετρος του κύκλου. Για τη διάμετρο ΒΓ ισχύει ότι ΒΓ = 2ρ = 10 .
Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$Β\Gamma^2 = ΑΒ^2 + Α\Gamma^2 \Leftrightarrow Α\Gamma^2 = Β\Gamma^2 - ΑΒ^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow Α\Gamma = 8$.

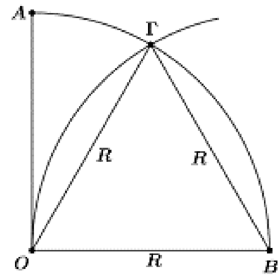
ii. $(ΑΒ\Gamma) = \dfrac{1}{2} ΑΒ \cdot Α\Gamma = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

22046.α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε ΒΑ⊥ΟΑ. Άρα, η γωνία $\widehat{ΟΑΒ}$ είναι ορθή.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ η κάθετη πλευρά ΟΑ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΟΒ, οπότε η απέναντι γωνία της $\widehat{ΟΒΑ}$ ισούται με 30^o.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $ΑΒ^2 = ΟΒ^2 - ΟΑ^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow ΑΒ = \sqrt{3}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $\widehat{ΑΟΒ} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, οπότε
$\ell_{Α\Gamma} = \dfrac{\pi R\mu}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$.
Η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΑΒΓ είναι:
$\Pi = ΑΒ + Β\Gamma + \ell_{Α\Gamma} = \sqrt{3} + 1 + \dfrac{\pi}{3}$.

4ο Θέμα



21192.α) Είναι ΟΒ = ΟΓ = ΒΓ = R ως ακτίνες των ίσων κύκλων, επομένως το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε $ΒΟΓ = 60^\circ$. Είναι

$$\ell_{ΒΓ} = \frac{\pi R\mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{3}$$

β) Επειδή στο τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ η γωνία $ΑΟΒ = 90^\circ$ έχουμε ότι:

$ΑΟΓ = ΑΟΒ - ΒΟΓ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ και το μήκος του αντίστοιχου τόξου ΑΓ είναι $\ell_{ΑΓ} = \frac{\pi R\mu}{180^\circ} = \frac{\pi R \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi R}{6}$.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, έχει ίσες γωνίες οπότε τα τόξα ΟΓ και ΒΓ είναι ίσα, ως αντίστοιχα τόξα των ίσων γωνιών ΟΒΓ και ΒΟΓ ίσων κύκλων, συνεπώς από το (α) ερώτημα έχουμε:

$$\ell_{ΟΓ} = \ell_{ΒΓ} = \frac{\pi R}{3}.$$

Η περίμετρος $Τ_{ΟΑΓ}$ του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ είναι:

$$Τ_{ΟΑΓ} = ΟΑ + \ell_{ΟΓ} + \ell_{ΑΓ} = R + \frac{\pi R}{3} + \frac{\pi R}{6} = R\left(1 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = R\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

21193.α) i. Επειδή ο ιμάντας εφάπτεται στους κυκλικούς τροχούς, οι ακτίνες ΑΛ και ΓΜ είναι ίσες και παράλληλες αφού είναι κάθετες στο ίδιο εφαπτόμενο τμήμα ΛΜ, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΛΜΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Για τις γωνίες με κορυφή το κέντρο Α του ενός τροχού έχουμε:

$$ΚΑΛ + 90^\circ + Α = 360^\circ \Leftrightarrow ΚΑΛ + Α = 180^\circ$$

β) Με βάση το α)ii. ερώτημα έχουμε: $\hat{\omega} + Α = 180^\circ$.

Ανάλογα για τις γωνίες Β και Γ βρίσκουμε $\hat{\theta} + Β = 180^\circ$ και $\hat{\varphi} + Γ = 180^\circ$.

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$$\hat{\omega} + Α + \hat{\theta} + Β + \hat{\varphi} + Γ = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\varphi} + 180^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow$$

$$\hat{\omega} + \hat{\theta} + \hat{\varphi} = 360^\circ .$$

γ) Με ανάλογο τρόπο, όπως για το τετράπλευρο ΑΛΜΓ του α) ι. ερωτήματος, αποδεικνύεται ότι και τα τετράπλευρα ΓΝΡΒ και ΒΣΚΑ είναι επίσης ορθογώνια, οπότε θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή ΝΡ = α, ΛΜ = β και ΚΣ = γ.

Είναι

$$L=\ell_{K\Lambda}+\Lambda M+\ell_{MN}+NP+\ell_{P\Sigma}+K\Sigma=\ell_{K\Lambda}+\ell_{MN}+\ell_{P\Sigma}+(\alpha+\beta+\gamma)\Leftrightarrow$$

$$L=\frac{\pi R\hat{\omega}}{180^\circ}+\frac{\pi R\hat{\varphi}}{180^\circ}+\frac{\pi R\hat{\theta}}{180^\circ}+2\tau=\frac{\pi R\left(\hat{\omega}+\hat{\theta}+\hat{\varphi}\right)}{180^\circ}+2\tau\Leftrightarrow$$

$$L=\frac{\pi R\cdot 360^\circ}{180^\circ}+2\tau=2\pi R+2\tau=2(\pi R+\tau).$$

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - τομέα

2ο Θέμα

18098.α) Τα τόξα ΘΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας ρ = 2 και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως, οι κυκλικοί τομείς Α.ΘΕ, Β.ΕΖ, Γ.ΖΗ, Δ.ΗΘ έχουν καθένας εμβαδόν ίσο με

$$(\text{Α.ΘΕ})=(\text{Β.ΕΖ})=(\text{Γ.ΖΗ})=(\text{Δ.ΗΘ})=\frac{\pi\rho^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi.$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau=4^2=16$, οπότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι: $E=E_\tau-4(\text{Α.ΘΕ})=16-4\pi=4(4-\pi)$.

20672.α) Η ακτίνα του ημικυκλίου C_1 είναι $\rho_1=\frac{AB}{2}=\frac{6}{2}=3$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_1=\frac{\pi\cdot 3^2}{2}=\frac{9\pi}{2}$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_2 είναι $\rho_2=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{4}{2}=2$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_2=\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=2\pi$.

Η ακτίνα του ημικυκλίου C_3 είναι $\rho_3=\frac{A\Gamma}{2}=\frac{2}{2}=1$ και το εμβαδόν του ισούται με $E_3=\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$.

β) Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ισούται με

$$E_1-E_2+E_3=\frac{9\pi}{2}-2\pi+\frac{\pi}{2}=3\pi.$$

21075.α) Είναι $E=\pi\rho^2 \Leftrightarrow 16\pi=\pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=16 \Leftrightarrow \rho=4$.

β) i. Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα ρ ισούται με $\rho\sqrt{2}$. Επομένως για ρ = 4 έχουμε ότι η πλευρά του τετραγώνου είναι $AB=4\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι 16π, ενώ το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E=\left(4\sqrt{2}\right)^2=32$.

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το τετράγωνο είναι ίσο με 16π – 32.

21121.α) $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 6=39$.

β) i) $\left(AE\Delta Z\right)=\frac{\pi R^2\mu}{360^\circ}=\frac{\pi\cdot 6^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}=9\pi$.

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κυκλικού τομέα $AE\Delta Z$, οπότε $E=(AB\Gamma)-\left(AE\Delta Z\right)=39-9\pi$.

21300.α) Η γωνία ΑΚΔ είναι η κεντρική γωνία ω_4 του τετραγώνου ΑΒΓΔ, άρα $AK\Delta=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την ΑΚΔ και υποτείνουσα την ΑΔ.

β) $(AK\Delta)=\frac{1}{2}K\Delta\cdot KA=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\rho=\frac{1}{2}\rho^2 \Leftrightarrow 4=\frac{1}{2}\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=8 \Leftrightarrow \rho=2\sqrt{2}$.

ii. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\pi\rho^2=\pi\left(\sqrt{8}\right)^2=8\pi$.

21301.α) Για το εμβαδόν Ε του κύκλου (Κ, ρ) ισχύει ότι $E=\pi\rho^2 \Leftrightarrow 4\pi=\pi\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=2$.

β) Είναι ΑΓ= 2ρ = 4 και από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2+B\Gamma^2=A\Gamma^2 \overset{AB=B\Gamma}{\Leftrightarrow} 2AB^2=4^2 \Leftrightarrow 2AB^2=16 \Leftrightarrow$$
$$AB^2=8 \Leftrightarrow AB=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

γ) $(AB\Gamma\Delta)=AB^2=8$.

22310.α) i) Επειδή η διάμετρος του ημικυκλίου είναι ΑΒ = 8 cm , η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{cm}$ και

το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = \frac{1}{2}\pi\rho^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi\,\text{cm}^2$.

ii) Το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\rho = \pi \cdot 4 = 4\pi\,\text{cm}$.

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι (ΑΒΓΔ) = ΑΒ · ΑΔ = 8 · ΑΔ cm^2 .
Επειδή το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά , έχουμε (ΑΒΓΔ) = Ε ⇔ 8 · ΑΔ = 8π ⇔ ΑΔ = π cm .
ii) Το μήκος του ημικυκλίου από το ερώτημα (α ii) είναι L = 4π cm .
Στο (β i) βρήκαμε ΑΔ = π cm και επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, είναι ΒΓ = ΑΔ = π cm και ΔΓ = ΑΒ = 8 cm.
Η περίμετρος Ρ του σχήματος (Σ) είναι Ρ = L + ΑΔ + ΔΓ + ΒΓ ⇔
Ρ = 4π + π + 8 + π = 6π + 8 cm .

4ο Θέμα

17599.α) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 θα υπολογιστεί, αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ. Έχουμε

$$(X_1) = (AB\Gamma\Delta) - \left(A.B\Delta\right) = \alpha^2 - \frac{\pi\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4 - \pi).$$

β) Το X_2 είναι ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ , οπότε:

$$(X_2) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{8}.$$

Το εμβαδόν X_3 θα υπολογισθεί αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου αφαιρέσουμε το X_2 και θα έχουμε:

$$(X_3) = (AB\Delta) - (X_2) = \frac{\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{8} = \frac{\pi\alpha^2}{8}$$

γ) $(X_2) - (X_1) = \frac{\pi\alpha^2}{8} - \frac{\alpha^2(4 - \pi)}{4} \Leftrightarrow$

$$(X_2) - (X_1) = \frac{\pi\alpha^2 - 2\alpha^2(4 - \pi)}{8} = \frac{\pi\alpha^2 - 8\alpha^2 + 2\pi\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2}{8}(3\pi - 8) > 0 \Leftrightarrow$$

$(X_2) > (X_1)$.

21197.α) i. Το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ = 2α έχει ακτίνα α και εμβαδόν $\mathrm{E}_{\mathrm{AB}}=\dfrac{\pi\alpha^2}{2}$.Αφού το εμβαδό του

ημικυκλίου είναι 10 τότε: $10=\dfrac{\pi\alpha^2}{2}\Leftrightarrow 20=\pi\alpha^2\Leftrightarrow \alpha^2=\dfrac{20}{\pi}$.

Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ με πλευρά 2α είναι:

$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=(2\alpha)^2=4\alpha^2=4\cdot\dfrac{20}{\pi}=\dfrac{80}{\pi}$.

ii. Το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ του τετραγώνου, επομένως $\Delta\Lambda=\dfrac{2\alpha}{2}=\alpha$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΛ εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\mathrm{A}\Lambda^2=\mathrm{A}\Delta^2+\Delta\Lambda^2=(2\alpha)^2+\alpha^2=4\alpha^2+\alpha^2=5\alpha^2=5\cdot\dfrac{20}{\pi}=\dfrac{100}{\pi}$

β) i. Το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος, υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου $\mathrm{A.MN}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό

$\mathrm{E}_{\mathrm{AB}}=\dfrac{\pi\cdot\dfrac{20}{\pi}}{2}=10$ του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Είναι $(\mathrm{A.MN})=\dfrac{\pi\cdot\mathrm{A}\Delta^2}{4}=\dfrac{\pi\cdot\dfrac{100}{\pi}}{4}=25$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του σκιασμένου σχήματος είναι:

$\mathrm{E}=(\mathrm{A.MN})-\mathrm{E}_{\mathrm{AB}}=25-10=15$.

ii. Είναι $\dfrac{(\mathrm{A.MN})}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}=\dfrac{25}{\dfrac{80}{\pi}}=\dfrac{25\pi}{80}=\dfrac{5\pi}{16}$.

21103.α) Το κάθε ημικύκλιο έχει ακτίνα ρ ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή $\rho=\dfrac{2\alpha}{2}=\alpha$.

Το μήκος του κάθε ημικυκλίου είναι $\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi\rho=\pi\alpha$.

β) i. Η περίμετρος της καρδιάς αποτελείται από τα δύο ημικύκλια και τις πλευρές ΑΔ και ΔΓ. Από το α) ερώτημα το κάθε ημικύκλιο έχει μήκος πα

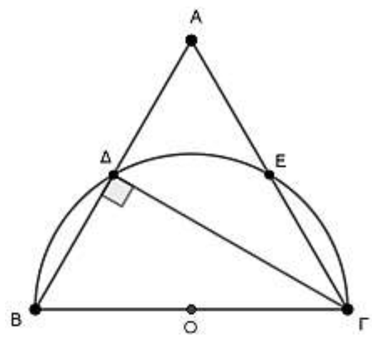
οπότε η περίμετρος θα ισούται με $\pi\alpha+\pi\alpha+2\alpha+2\alpha=2\pi\alpha+4\alpha$. Από υπόθεση έχουμε ότι η περίμετρος είναι 2π + 4, οπότε
$2\pi\alpha+4\alpha=2\pi+4 \Leftrightarrow (2\pi+4)\alpha=2\pi+4$, άρα α = 1.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ έχουμε ΒΕ = ΒΖ = α. Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $EZ^2=BE^2+BZ^2=1^2+1^2=2 \Leftrightarrow EZ=\sqrt{2}$.

γ) Τα δύο ημικύκλια είναι ίσα γιατί έχουν την ίδια ακτίνα α, οπότε το άθροισμά τους θα είναι ένας κυκλικός δίσκος με ακτίνα α. Το εμβαδόν του θα είναι $(\tau)=\pi\rho^2=\pi\alpha^2$.

Είναι $(AB\Gamma\Delta)=AB^2=4\alpha^2$, οπότε $\dfrac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}=\dfrac{\pi\alpha^2}{4\alpha^2}=\dfrac{\pi}{4}<1$

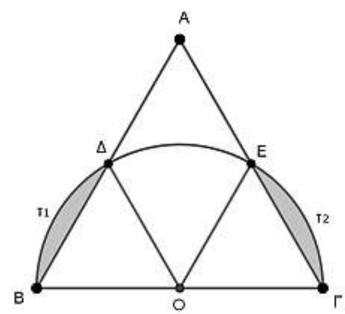
21979.α) Είναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = 2α, ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ = ΟΕ = α και



$A=B=\Gamma=60^\circ$.Επίσης η ΒΓ είναι διάμετρος του ημικυκλίου, άρα

$B\Delta\Gamma=90^\circ$.Δηλαδή στο ισόπλευρο τρίγωνο ΓΑΒ, το ΓΔ είναι ύψος, οπότε θα είναι και διάμεσος.
Άρα το Δ είναι μέσο της ΑΒ και όμοια το Ε, είναι μέσο της ΑΓ, οπότε ΔΒ = ΔΑ = ΕΑ = ΕΓ = α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ, από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\Delta\Gamma^2=B\Gamma^2-B\Delta^2=(2\alpha)^2-\alpha^2=4\alpha^2-\alpha^2=3\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Delta\Gamma=\alpha\sqrt{3}$.

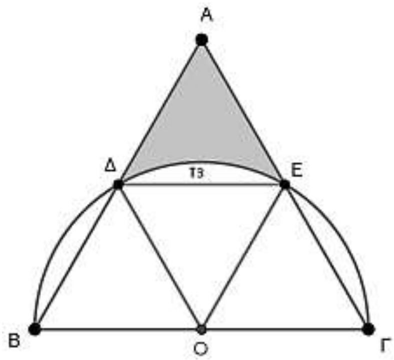


β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α, οπότε θα είναι ίσα. Επομένως τα εμβαδά τ1, τ2 των δύο κυκλικών τμημάτων θα είναι ίσα.
Άρα $E=\tau_1+\tau_2=2\tau_1$ (1).
Όμως

$$\tau_1=(OB\Delta)-(OB\Delta)=\frac{\pi\alpha^2\cdot 60^\circ}{360^\circ}-\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi\alpha^2 - 3\alpha^2\sqrt{3}}{12} = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{12}$$, άρα

$$E = 2 \cdot \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{12} = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{6}.$$



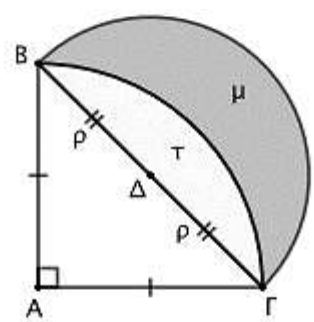
γ) Λόγω του ερωτήματος (α), τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΟΔΕ είναι ισόπλευρα πλευράς α. Οπότε το εμβαδό τ_3, του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΔΕ θα ισούται με τα εμβαδά τ_1 και τ_2. Δηλαδή $\tau_3 = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{12}$.

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = (\mathrm{A\Delta E}) - \tau_3 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\alpha^2}{12} \Leftrightarrow$$

$$E = (\mathrm{A\Delta E}) - \tau_3 = \frac{3\alpha^2\sqrt{3} - 2\pi\alpha^2 + 3\alpha^2\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{6\alpha^2\sqrt{3} - 2\pi\alpha^2}{12} = \frac{2\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\alpha^2}{12} = \frac{\left(3\sqrt{3} - \pi\right)\alpha^2}{6}.$$



22021.α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο είναι ΑΒ = ΑΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 \Leftrightarrow$$

$$(2\rho)^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AB}^2 \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{AB}^2 = 4\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB} = \rho\sqrt{2}.$$

β) Το εμβαδόν (μ) του σχηματιζόμενου μηνίσκου προκύπτει αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος με χορδή ΒΓ, δηλαδή:

$$(\mu) = (\Delta\mathrm{B\Gamma}) - (\tau).$$

Είναι $\left(\Delta\mathrm{B\Gamma}\right)=\dfrac{\pi\Delta\Gamma^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\rho^2}{2}$ και

$$\left(\tau\right)=\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)-\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\frac{\pi\mathrm{AB}^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}\Leftrightarrow$$

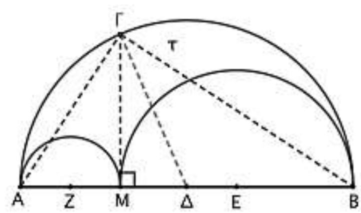
$\left(\tau\right)=\dfrac{\pi\cdot 2\rho^2}{4}-\dfrac{1}{2}\cdot 2\rho^2=\dfrac{\pi\rho^2}{2}-\rho^2$, οπότε

$$\left(\mu\right)=\frac{\pi\rho^2}{2}-\left(\frac{\pi\rho^2}{2}-\rho^2\right)=\rho^2 .$$

γ) Είναι $\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\rho^2=\rho^2$, οπότε $\left(\mu\right)=\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)$, δηλαδή ο σχηματιζόμενος μηνίσκος είναι ισοδύναμος με το τρίγωνο ΑΒΓ.

22024.α) $\left(\mathrm{ZAM}\right)=\dfrac{\pi\cdot\mathrm{ZM}^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\alpha^2}{2}$, $\left(\mathrm{EMB}\right)=\dfrac{\pi\cdot\mathrm{EB}^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\beta^2}{2}$

και $\left(\Delta\mathrm{AB}\right)=\dfrac{\pi\cdot\Delta\mathrm{B}^2\cdot 180^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi\left(\alpha+\beta\right)^2}{2}$.



β) Για το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τα, ισχύει:

$$\left(\tau\right)=\left(\Delta\mathrm{AB}\right)-\left(\mathrm{ZAM}\right)-\left(\mathrm{EMB}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\tau\right)=\frac{\pi\left(\alpha+\beta\right)^2}{2}-\frac{\pi\alpha^2}{2}-\frac{\pi\beta^2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\left(\tau\right)=\frac{\pi\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2-\beta^2\right)}{2}=\frac{\pi\cdot 2\alpha\beta}{2}=\pi\alpha\beta .$$

γ) Ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ έχει εμβαδό $\mathrm{E}=\pi\left(\dfrac{\mathrm{M\Gamma}}{2}\right)^2=\dfrac{\pi\cdot\mathrm{M\Gamma}^2}{4}$.

Όμως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Γ, αφού η γωνία $\mathrm{A\Gamma B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ. Οπότε:

$\mathrm{M\Gamma}^2=\mathrm{AM}\cdot\mathrm{MB}=2\alpha\cdot 2\beta=4\alpha\beta$ οπότε $\mathrm{E}=\left(\tau\right)$, δηλαδή ο κύκλος με διάμετρο ΜΓ είναι ισοδύναμος με το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

δ) Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ θα γίνει μέγιστο όταν το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν μεγιστοποιηθεί το κλάσμα $\dfrac{\pi\cdot\mathrm{M\Gamma}^2}{4}$.

Το κλάσμα αυτό παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το κάθετο τμήμα ΜΓ γίνει μέγιστο, δηλαδή όταν ΜΓ= R, αφού ΜΓ ≤ ΔΓ = R. Άρα, το σημείο Μ θα είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή θα είναι α = β.

22058.α) Είναι $\mathrm{A\Delta} = \Delta\mathrm{E} = \mathrm{EB} = \frac{2R}{3}$.

Τα ημικύκλια $\mathrm{A\Delta}$ και BE έχουν ακτίνα $\rho_1 = \frac{\mathrm{A\Delta}}{2} = \frac{R}{3}$ και εμβαδόν

$$\varepsilon = \frac{\pi \cdot \rho_1^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{18}.$$

Τα ημικύκλια AE και $\mathrm{B\Delta}$ έχουν ακτίνα $\rho_2 = \frac{\mathrm{AE}}{2} = \mathrm{A\Delta} = \frac{2R}{3}$ και εμβαδόν

$$\tau = \frac{\pi \cdot \rho_2^2 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^2}{2} = \frac{2\pi R^2}{9}.$$

Τα ημικύκλια AHB και AZB έχουν ακτίνα R και εμβαδόν $\sigma = \frac{\pi R^2}{2}$.

Οπότε, τα καμπυλόγραμμα σχήματα ΑΔΒΖ και ΒΕΑΗ έχουν εμβαδόν

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \sigma + \varepsilon - \tau = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{2\pi R^2}{9} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1 = \frac{9\pi R^2}{18} + \frac{\pi R^2}{18} - \frac{4\pi R^2}{18} = \frac{6\pi R^2}{18} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

β) Το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ είναι $E = \pi R^2$. Επομένως, το καμπυλόγραμμο σχήμα ΑΔΒΕ έχει εμβαδόν

$$\varepsilon_2 = E - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{\pi R^2}{3}.$$

Είναι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\pi R^2}{3} = \frac{E}{3}$, άρα ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

22098.α) Είναι (ΑΒΓΔ) = ΑΒ · ΑΔ = 4α · πα = $4\pi\alpha^2$.

Το εμβαδόν του ημικυκλίου ακτίνας $R = \frac{AB}{2} = \frac{4\alpha}{2} = 2\alpha$ είναι

$$E_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi(2\alpha)^2}{2} = 2\pi\alpha^2 \ (1).$$

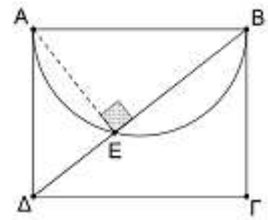
Το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και εξωτερικά του ημικυκλίου γίνεται από τον τύπο

$$E_2 = (AB\Gamma\Delta) - E_1 = 4\pi\alpha^2 - 2\pi\alpha^2 = 2\pi\alpha^2 \ (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β) Η διαγώνιος ΒΔ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο Ε.

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ.



i. Είναι $AEB = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΒΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ η ΔΕ είναι η προβολή της κάθετης πλευράς ΑΔ πάνω στην υποτείνουσα ΒΔ, επομένως $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$ (2)

ii. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

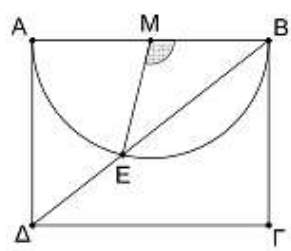
$$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 = (4\alpha)^2 + (\pi\alpha)^2 = 16\alpha^2 + \pi^2\alpha^2 = (16+\pi^2)\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$B\Delta = \alpha\sqrt{16+\pi^2} .$$

Η σχέση (1) γίνεται: $(4\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2} \cdot BE \Leftrightarrow BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$.

Η σχέση (2) γίνεται: $(\pi\alpha)^2 = \alpha\sqrt{16+\pi^2} \cdot \Delta E \Leftrightarrow \Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$

iii. Έστω Μ το μέσο της ΑΒ.



Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΒ είναι ακτίνες του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ, επομένως $ME = MB = \frac{AB}{2} = 2\alpha$.

Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΕΜ ισχύει

$$BE^2 = MB^2 + ME^2 - 2MB \cdot ME \cdot \text{συν}BME \Leftrightarrow$$

$$\sigmaυνB\widehat{M}E=\frac{MB^2+ME^2-BE^2}{2MB\cdot ME}=\frac{(2\alpha)^2+(2\alpha)^2-\frac{256\alpha^2}{16+\pi^2}}{22\alpha\cdot 2\alpha}=\frac{\pi^2-16}{\pi^2+16}.$$

22151.α) i. Το εμβαδόν E_{AE} του κύκλου (Α, r) είναι ίσο με $E_{AE}=\pi r^2$ και το εμβαδόν $E_{E\Gamma}$ του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, r) και (Α, R) είναι ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο κύκλων, δηλαδή

$E_{E\Gamma}=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left(R^2-r^2\right)$, άρα $\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}}=\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{\pi r^2}=\frac{R^2-r^2}{r^2}$.

ii. Είναι $E_{A\Delta}=\pi\rho^2$ και $E_{\Delta B}=\pi\left(r^2-\rho^2\right)$, οπότε

$$\frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}=\frac{\pi\left(r^2-\rho^2\right)}{\pi\rho^2}=\frac{r^2-\rho^2}{\rho^2}.$$

β) Αρκεί $\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}}=\frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}\Leftrightarrow$

$$\frac{R^2-r^2}{r^2}=\frac{r^2-\rho^2}{\rho^2}\Leftrightarrow\frac{R^2}{r^2}-1=\frac{r^2}{\rho^2}-1\Leftrightarrow\frac{R^2}{r^2}=\frac{r^2}{\rho^2}\Leftrightarrow\frac{R}{r}=\frac{r}{\rho}.$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, γιατί: Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}\Leftrightarrow\frac{\rho}{r}=\frac{r}{R}\Leftrightarrow\frac{R}{r}=\frac{r}{\rho}.$$

22154.α) i. Για το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου ισχύει ότι $E_{E\Gamma}=E_3-E_2$.

Είναι

$$\frac{E_{E\Gamma}}{E_2}=\frac{E_3-E_2}{E_2}\Leftrightarrow\frac{7}{9}=\frac{\pi\rho_3^2-\pi\rho_2^2}{\pi\rho_2^2}\Leftrightarrow\frac{7}{9}=\frac{\pi\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)}{\pi\rho_2^2}\Leftrightarrow\frac{7}{9}=\frac{\rho_3^2-\rho_2^2}{\rho_2^2}\Leftrightarrow$$

$$7\rho_2^2=9\rho_3^2-9\rho_2^2\Leftrightarrow 16\rho_2^2=9\rho_3^2\Leftrightarrow\frac{\rho_2^2}{\rho_3^2}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow\frac{\rho_2}{\rho_3}=\frac{3}{4}.$$

ii. $\frac{E_2}{E_3}=\frac{\pi\rho_2^2}{\pi\rho_3^2}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_3}\right)^2=\frac{9}{16}$.

iii. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την παράλληλη ΔΕ στην πλευρά του ΒΓ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΒΓ. Άρα:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}\Leftrightarrow\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_3}=\frac{ΔΕ}{ΒΓ}\Rightarrow\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\rho_2}{\rho_2\sqrt{2}}\Leftrightarrow\rho_2=\rho_1\sqrt{2}.$$

Είναι $E_2=\pi\rho_2^2=\pi\left(\rho_1\sqrt{2}\right)^2=2\pi\rho_1^2=2E_1$.

Επίσης, για το εμβαδόν $E_{ΔΒ}$ του δακτυλίου που είναι χρωματισμένος στο παρακάτω σχήμα έχουμε $E_{ΔΒ}=E_2-E_1=2E_1-E_1=E_1$.

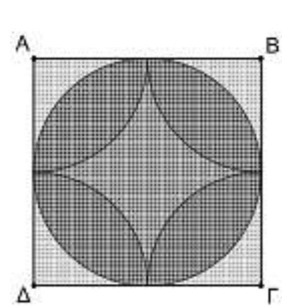
22244. Το εμβαδόν του τετράγωνου κήπου είναι $E=10^2=100m^2$.

α) i. Ο κάθε ένας από τους δύο μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90° και ακτίνας 10m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι $E_1=\dfrac{\pi\cdot10^2\cdot90^\circ}{360^\circ}=25\pi\ m^2$.

ii. Οι δύο μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ μια περιοχή του κήπου ποτίζεται και από τους δύο μηχανισμούς. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τομέων ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν της περιοχής του κήπου που ποτίζεται από τους δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτής της περιοχής είναι $2E_1-E=50\pi-100=50(\pi-2)m^2$.

β) i. Ο κάθε ένας από τους τέσσερις μηχανισμούς ποτίσματος ποτίζει έναν κυκλικό τομέα γωνίας 90° και ακτίνας 5m. Το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα είναι $E_2=\dfrac{\pi\cdot5^2\cdot90^\circ}{360^\circ}=\dfrac{25\pi}{4}\ m^2$.

Το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι
$E-4E_2=100-25\pi=25(4-\pi)m^2$.

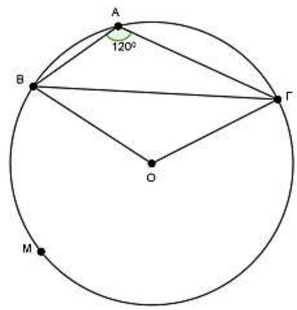


ii. Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που ποτίζει ο πέμπτος μηχανισμός είναι
$E_3=\pi\cdot5^2=25\pi\ m^2$

Οι πέντε μηχανισμοί ποτίσματος ποτίζουν ολόκληρο τον κήπο, ενώ τέσσερις περιοχές του κήπου ποτίζονται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων κυκλικών τομέων αυξημένο κατά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου αυξημένο κατά το εμβαδόν του

κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς. Άρα το εμβαδόν αυτό είναι
$4E_1 + E_3 - E = 25\pi + 25\pi - 100 = 50(\pi - 2)\ m^2$
Παρατηρούμε ότι η τιμή του εμβαδού είναι ίση με αυτή του ερωτήματος α).

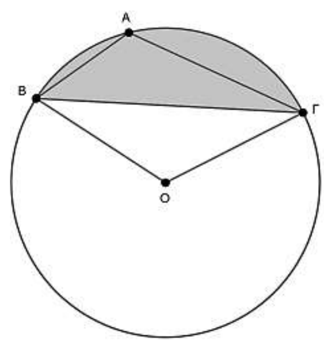
22261.α) Είναι $B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma} \Leftrightarrow B\Gamma^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow$
$B\Gamma^2 > A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$.



β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:
$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2A\Gamma \cdot AB \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$

$\cancel{\beta^2} + \cancel{\gamma^2} + \beta\gamma = \cancel{A\Gamma^2} + \cancel{AB^2} - 2A\Gamma \cdot AB \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$
$2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = -\beta\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A = 120^\circ$

γ) Η γωνία ΒΑΓ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, οπότε το τόξο στο οποίο βαίνει θα έχει μέτρο διπλάσιο από αυτήν.
Άρα $BM\Gamma = 2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$.
Έτσι για το κυρτογώνιο τόξο ΒΑΓ ισχύει:
$BA\Gamma = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, οπότε η επίκεντρη γωνία ΒΟΓ ισούται με 120^0.



$$E = (OBA\Gamma) - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \eta\mu 120^\circ \Leftrightarrow$$
$$E = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}.$$

22389.α) Επειδή το Ε είναι το μέσο της ΑΓ, είναι ΑΓ = 2ΓΕ = 2ρ.. Ακόμη ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = R + ρ.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 \Leftrightarrow (\mathrm{R}+\rho)^2 = \mathrm{R}^2 + (2\rho)^2 \Leftrightarrow \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\rho + \rho^2 = \mathrm{R}^2 + 4\rho^2 \Leftrightarrow$$

$$2\mathrm{R}\rho = 3\rho^2 \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{3}\mathrm{R}\ .$$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$\mathrm{E}_1 = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{A\Gamma}\cdot \mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot 2\rho\cdot \mathrm{R} = \frac{2}{3}\mathrm{R}\cdot \mathrm{R} = \frac{2}{3}\mathrm{R}^2$ και του κύκλου (B,R), είναι

$\mathrm{E}_2 = \pi \mathrm{R}^2$, άρα $\dfrac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1} = \dfrac{\pi \mathrm{R}^2}{\frac{2}{3}\mathrm{R}^2} = \dfrac{3\pi}{2}$.

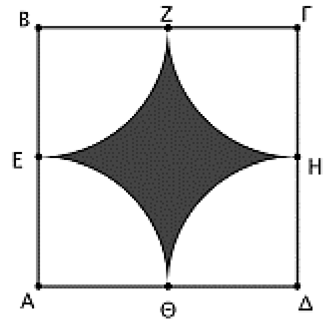
γ) Ο κυκλικός τομέας $\mathrm{BA\Delta}$ έχει εμβαδό $\mathrm{E}_3 = \dfrac{\pi \mathrm{R}^2\cdot \mu^\circ}{360^\circ}$ και ο κυκλικός

τομέας $\mathrm{\Gamma\Delta E}$ έχει εμβαδό $\mathrm{E}_4 = \dfrac{\pi\rho^2\cdot (90-\mu)^\circ}{360^\circ} = \dfrac{4\pi \mathrm{R}^2\cdot (90-\mu)^\circ}{9\cdot 360^\circ}$, άρα

$$\frac{\mathrm{E}_4}{\mathrm{E}_3} = \frac{\dfrac{4\pi \mathrm{R}^2(90-\mu)^\circ}{9\cdot 360^\circ}}{\dfrac{\pi \mathrm{R}^2\cdot \mu^\circ}{360^\circ}} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$$

3ο Θέμα

22054.α) Τα τόξα $\Theta E, EZ, ZH, H\Theta$ είναι τόξα ίσων κύκλων ακτίνας α και αντιστοιχούν σε ίσες επίκεντρες γωνίες 90^o. Επομένως,



$$\left(A\Theta E\right)=\left(BEZ\right)=\left(\Gamma ZH\right)=\left(\Delta H\Theta\right)=\frac{\pi\alpha^2\cdot 90^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi\alpha^2}{4}.$$

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau=\left(2\alpha\right)^2=4\alpha^2$.

Οπότε, το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι:

$$E=E_\tau-4\left(A\Theta E\right)=4\alpha^2-4\frac{\pi\alpha^2}{4}=4\alpha^2-\pi\alpha^2=\alpha^2\left(4-\pi\right).$$

γ) Το μήκος καθενός από τα ίσα τόξα $\Theta E, EZ, ZH, H\Theta$ είναι

$$\ell=\frac{\pi\alpha 90^\circ}{180^\circ}=\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Οπότε, η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι: $L=4\ell=4\frac{\pi\alpha}{2}=2\pi\alpha$.

Διανύσματα

Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

Θέμα 2ο

21165.α) $\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Delta}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$,

$\overrightarrow{Z\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}$.

β) Είναι $\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)=2\overrightarrow{EZ}$.

γ) Επειδή $\overrightarrow{Z\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}$ είναι $\overrightarrow{Z\Gamma}//\overrightarrow{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Ζ έχουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

22055.α) (i) Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B'A'}$ είναι ίσα έχουν και ίσα μέτρα.

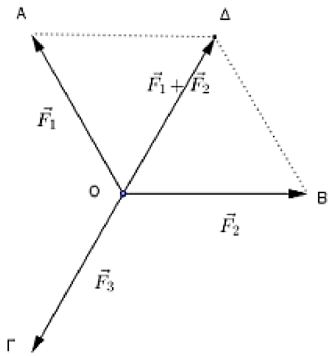
(ii) Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ είναι ίσα έχουν και ίσα μέτρα.

β) i. Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{A'\Gamma'}=\overrightarrow{B'\Gamma'}$

(ii) Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ είναι ίσα έχουν και ίσα μέτρα.

γ) Ναι γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν και τις 3 πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα.

Θέμα 4ο



22068.α) $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0}$.

β) $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_2=-\vec{F}_3$.

γ) i. Επειδή οι γωνίες των διανυσμάτων $\vec{F}_1, \vec{F}_3$ και $\vec{F}_2,\ \vec{F}_3$ είναι 120^o, είναι

$A\hat{O}\Delta = B\hat{O}\Delta = 60^o$ ως παραπληρωματικές τους.

ii. Είναι $O\hat{\Delta}B = \Delta\hat{O}A = 60^o$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΔ, ΟΔ που τέμνονται από την ΟΔ.

δ) Το τετράπλευρο ΑΔΒΟ είναι παραλληλόγραμμο και η διαγώνιος ΟΔ διχοτομεί τη γωνία Ο, οπότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος και οι πλευρές του είναι ίσες. Άρα $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|$.

Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές (ΟΑ=ΑΔ) και έχει μια γωνία του 60^o, οπότε είναι ισόπλευρο και

ΟΔ=ΟΑ=ΑΔ, άρα $|\vec{F}_1+\vec{F}_2|=|\overrightarrow{O\Delta}|=|\vec{F}_1| \Leftrightarrow |-\vec{F}_3|=|\vec{F}_1| \Leftrightarrow |\vec{F}_3|=|\vec{F}_1|$.

Επομένως $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=|\vec{F}_3|$.

Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα
Θέμα 2ο

15010.α) i. Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{\Gamma E}-\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma B}$.
ii. Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{\Gamma B}=-\overrightarrow{AE}$
β) Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=-\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Delta}//\overrightarrow{AE}$ και επειδή τα διανύσματα αυτά έχουν κοινό σημείο το Α, τα σημεία Α, Δ και Ε είναι συνευθειακά.

22042.α) Επειδή τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα, είναι ΔΚ=ΚΛ=ΛΜ=ΜΓ, οπότε $\overrightarrow{\Delta K}=\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{\Lambda M}=\overrightarrow{M\Gamma}=\vec{\alpha}$, οπότε $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=4\vec{\alpha}$.
β) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=-3\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
γ) $\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{\Lambda\Delta}=\frac{1}{2}\vec{\beta}-2\vec{\alpha}$

21885.α) Είναι
$\overrightarrow{AB}=\kappa\cdot\overrightarrow{A\Delta}\Leftrightarrow\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{\kappa}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\cdot\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{A\Gamma}$.
$\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{1}{\kappa}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\lambda}\vec{\beta}-\frac{1}{\kappa}\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$.
β) i. Αν $\kappa=\lambda$ τότε
$\overrightarrow{\Delta E}=\frac{1}{\kappa}\vec{\beta}-\frac{1}{\kappa}\vec{\alpha}=\frac{1}{\kappa}\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)=\frac{1}{\kappa}\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}=\kappa\overrightarrow{\Delta E}\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}//\overrightarrow{\Delta E}$ και
$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\kappa\left|\overrightarrow{\Delta E}\right|$.
ii. Αν κ=λ=2 τότε $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=2\overrightarrow{AE}$, δηλαδή τα Δ, Ε είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ.
Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}//\overrightarrow{\Delta E}$ και $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=2\left|\overrightarrow{\Delta E}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{\Delta E}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$, δηλαδή αποδείξαμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

Συντεταγμένες διανύσματος
Θέμα 2ο

α) Είναι $\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}=3(1,-3)-5(-2,-1)=(3,-9)+(10,5)=(13,-4)$ και
$\vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}=5(1,-3)-9(-2,-1)=(5,-15)+(18,9)=(23,-6)$.

β) $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}=2\left(3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}\right)-\left(5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}\right)=6\vec{\alpha}-10\vec{\beta}-5\vec{\alpha}+9\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

γ) Είναι $\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{O\Lambda}-\overrightarrow{OK}=\vec{w}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και
$\overrightarrow{\Lambda M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Lambda}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}-\vec{\alpha}+\vec{\beta}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{\Lambda M}=2\vec{\alpha}-4\vec{\beta}=2\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)=2\overrightarrow{K\Lambda}$, άρα τα διανύσματα
$\overrightarrow{\Lambda M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Lambda}$ και $\overrightarrow{K\Lambda}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

15002.α) Έστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=(x,y-5)$.
Όμως $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,1)$, άρα $x=3$ και $y-5=1\Leftrightarrow y=6$, οπότε Γ(3,6).

β) i. $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(4-3,5-6)=(1,-1)$

ii. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+3=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

15043.α) i. $\overrightarrow{AB}=(4-0,1-5)=(4,-4)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(6-4,-1-1)=(2,-2)$.

ii. Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}4 & -4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-8+8=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow$ Α, Β, Γ συνευθειακά σημεία.

β) Είναι $\overrightarrow{AB}=(4,-4)=2(2,-2)=2\overrightarrow{B\Gamma}$ άρα $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$.

15854.α) $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -8 & -4\end{vmatrix}=-8+8=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

β) $\vec{\beta}=(-8,\,-4)=-4(2,1)=-4\vec{\alpha}$.

γ) $\left|\vec{\beta}\right|=\left|-4\vec{\alpha}\right|=|-4|\left|\vec{\alpha}\right|=4\left|\vec{\alpha}\right|$.

16147.α) Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$ και $\lambda_{\vec{\delta}} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

β) Επειδή $\lambda_{\vec{\beta}} = 0$, το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο στον άξονα x΄x, οπότε η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx είναι 0°.

Στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, οπότε η γωνία που σχηματίζει με τον ημιάξονα Οx είναι 90°.

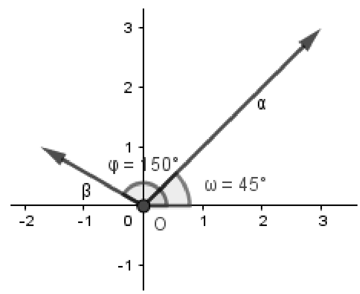
Αν ω, φ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\delta}$ αντίστοιχα με τον άξονα x΄x, τότε $\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \omega = 60^\circ$ και

$\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\vec{\delta}} = -1 = -\varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - 45^\circ\right) = \varepsilon\varphi 135^\circ \Leftrightarrow \varphi = 135^\circ$

γ) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$, $|\vec{\gamma}| = |-3| = 3$.

16151.α) Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \dfrac{3}{3} = 1$ και

$\lambda_{\vec{\beta}} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



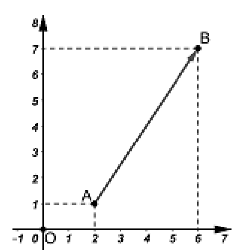
Αν ω, φ οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα με τον άξονα x΄x, τότε

$\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{\vec{\alpha}} = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$ και

$\varepsilon\varphi\varphi = \lambda_{\vec{\beta}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\varepsilon\varphi 30^\circ = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - 30^\circ\right) = \varepsilon\varphi 150^\circ \Leftrightarrow \varphi = 150^\circ$.

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \varphi - \omega = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ$ /

16579.α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία *A*(2,1) και Β(6,7). Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το Α και πέρας το Β.



β) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \left(6-2, 7-1\right) = \left(4,6\right)$

γ) Παρατηρούμε ότι

$\vec{u} = \left(-8,-12\right) = \left(-2\cdot 4, -2\cdot 6\right) = -2\cdot\left(4,6\right) = -2\vec{v}$, άρα τα διανύσματα $\vec{u},\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

16580.α) $\overrightarrow{AB}=(11-2,5-4)=(9,1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3-2,7-4)=(1,3)$

β) $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=(9,1)+(1,3)=(10,4)$

γ) Είναι $\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A,y_\Delta-y_A)\Leftrightarrow(10,4)=(x_\Delta-2,y_\Delta-4)\Leftrightarrow$

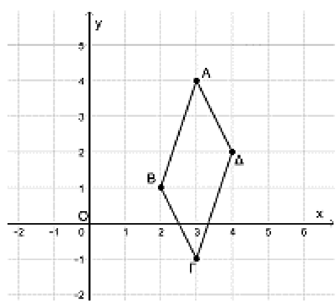
$\begin{cases}x_\Delta-2=10\\ y_\Delta-4=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_\Delta=12\\ y_\Delta=8\end{cases}$, άρα $\Delta(12,8)$.

16581.α) $\overrightarrow{AB}=(1-(-1),2-6)=(2,-4)$, $\overrightarrow{B\Gamma}=(3-1,-2-2)=(2,-4)$

β) Είναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$, επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το Β είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Gamma}$, συμπεραίνουμε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

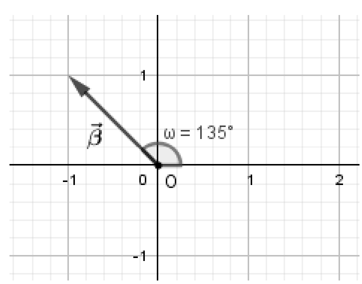
17070.α)



β) $\overrightarrow{AB}=(2-3,1-4)=(-1,-3)$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(3-4,-1-2)=(-1,-3)$.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

19038.α) Είναι $\lambda_{\vec\beta}=\frac{1}{-1}=-1$, οπότε αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec\beta$ με τον άξονα x΄x, είναι $\varepsilon\varphi\omega=-1$. Επειδή το διάνυσμα βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο είναι $\omega=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.



β) Είναι $|\vec{\gamma}|=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ και $|\beta|=\sqrt{(-1)^2+=}=\sqrt{2}$,
άρα $|\vec{\gamma}|=5|\vec{\beta}|$.

γ) $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\Leftrightarrow(-5,-5)=\lambda(2,3)+\mu(-1,1)\Leftrightarrow$
$(-5,-5)=(2\lambda-\mu,3\lambda+\mu)\Leftrightarrow$
$\begin{cases}2\lambda-\mu=-5 \\ 3\lambda+\mu=-5\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}5\lambda=-10\Leftrightarrow\lambda=-2$ και $3\cdot(-2)+\mu=-5\Leftrightarrow\mu=1$, άρα
$\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

18878.α) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(1,1)+(2,4)+\left(2,5\sqrt{3}-5\right)=\left(5,5\sqrt{3}\right)$.

β) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OT}}\right|=\sqrt{5^2+\left(5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{25+75}=\sqrt{100}=10$.
Επομένως, η απόσταση από την κατασκήνωση είναι 10km.

21681. α) Έστω ότι το Δ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε
$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(2-x,5-y)$, $\overrightarrow{AB}=(-3-1,4-2)=(-4,2)$ και
$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(2-x=-4\Leftrightarrow x=6)$ και $(5-y=2\Leftrightarrow y=3)$, άρα Δ(6, 3).

β) Επειδή $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{AB}$ το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το Ο είναι μέσο του ΑΓ άρα $x_O=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{3}{2}$, $y_O=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{7}{2}$,
άρα $O\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$.

22038.α) Επειδή το $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ ισχύει ότι $\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha},\ \lambda>0$.
Είναι $|\vec{\beta}|=\lambda|\vec{\alpha}|\Leftrightarrow1=\lambda\sqrt{5^2+(-12)^2}\Leftrightarrow1=13\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{13}$, άρα
$\vec{\beta}=\frac{1}{13}\vec{\alpha}=\frac{1}{13}(5,-12)=\left(\frac{5}{13},-\frac{12}{13}\right)$.

β) Επειδή το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$, ισχύει ότι
$\vec{\gamma}=\mu\vec{\alpha},\ \mu<0$.
Είναι $|\vec{\gamma}|=|\mu||\vec{\alpha}|\Leftrightarrow7=|\mu|\cdot13\overset{\mu<0}{\Leftrightarrow}\mu=-\frac{7}{13}$, άρα

$\vec{\gamma} = -\dfrac{7}{13}\vec{\alpha} = -\dfrac{7}{13}(5,-12) = \left(-\dfrac{35}{13}, \dfrac{84}{13}\right).$

22060.α) $\overrightarrow{A\Delta} = (3-0, 4-2) = (3,2)$, $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-3, 2-0) = (3,2) = \overrightarrow{A\Delta}$,

$\overrightarrow{BA} = (0-3, 2-0) = (-3,2)$.

β) $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = \left|\overrightarrow{BA}\right|$.

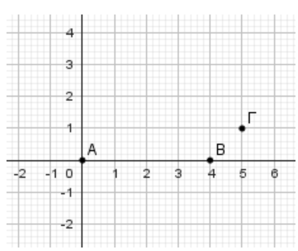
Επειδή $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$, δύο διαδοχικές πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

22557.α) i) Επειδή το Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και (ΟΑ) = 8 είναι $y_A = 8$, επομένως Α(0,8).
Το Ο είναι το μέσο του ΒΓ και (ΒΓ) = 12, είναι (ΟΒ) = (ΟΓ) = 6, άρα $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου της πλευράς είναι:
$x_M = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2} = \dfrac{0+6}{2} = 3$, $y_M = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2} = \dfrac{8+0}{2} = 4$,
άρα Μ(3,4).

β) Είναι $(BM) = \sqrt{(3+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}$.

22044.α)



β) Έστω ότι το Δ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (5-x, 1-y)$,

$\overrightarrow{AB} = (4-0, 0-0) = (4,0)$ και

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (5-x = 4 \Leftrightarrow x = 1)$ και $(1-y = 0 \Leftrightarrow y = 1)$, άρα Δ(1, 1).

Θέμα 4ο

17076.α) $\overrightarrow{AM}=\left(x-(-3),y-(-1)\right)=(x+3,y+1)$,

$\overrightarrow{MB}=(0-x,3-y)=(-x,3-y)$

$\overrightarrow{AB}=\left(0-(-3),3-(-1)\right)=(3,4)$.

β) $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}$, $\left|\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{x^2+(3-y)^2}$ και

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

γ) Είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right|=5$, όμως

$\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right|\le\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$, άρα $5\le\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|$.

δ) $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}=4\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$ άτοπο, οπότε δεν υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) ώστε να ισχύει $\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|=4$.

17076.α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}-2\vec{i}-\lambda\vec{j}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$.

β) $(AB)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(\lambda-1)^2+3^2}=\sqrt{(\lambda-1)^2+9}$.

γ) $(AB)=5\Leftrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+9}=5\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9=25\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=16\Leftrightarrow$
$\lambda-1=\pm4\Leftrightarrow(\lambda=5\ )\text{ ή }(\lambda=-3)$.

δ) Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $(\lambda-1)^2\ge0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2+9\ge9\Leftrightarrow(AB)\ge9$ άρα η απόσταση AB έχει ελάχιστη τιμή το 9 όταν $\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$.Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων
Θέμα 2ο

14586. α) $\overrightarrow{AB}=(3-1,4-2)=(2,2)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(5-1,-2-2)=(4,-4)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot4+2(-4)=8-8=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow A=90^\circ$.

β) Είναι $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=4$, $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=1$, άρα Μ(4,1).

Είναι $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(4-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ και

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{(5-3)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

γ) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=(5-3,-2-4)=(2,-6)$, $\overrightarrow{AM}=(4-1,1-2)=(3,-1)$.

Έστω $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με $\overrightarrow{B\Gamma}=\kappa\overrightarrow{A\Gamma}+\lambda\overrightarrow{AM}$, τότε

$(2,-6)=\kappa(4,-4)+\lambda(3,-1)\Leftrightarrow(2,-6)=(4\kappa+3\lambda,-4\kappa-\lambda)\Leftrightarrow$

$\begin{cases}4\kappa+3\lambda=2\\-4\kappa-\lambda=-6\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}2\lambda=-4\Leftrightarrow\lambda=-2$ και

$4\kappa+3(-2)=2\Leftrightarrow4\kappa-6=2\Leftrightarrow4\kappa=8\Leftrightarrow\kappa=2$, άρα

$\overrightarrow{B\Gamma}=-2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{A\Gamma}$.

14953. α) $\overrightarrow{AB}=(7+2,8-5)=(9,3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(1+2,-4-5)=(3,-9)$.

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=9\cdot3+3\cdot(-9)=27-27=0$.

γ) Επειδή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$ είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε $BA\Gamma=90^\circ$.

15038.α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=3\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}=6$

β) $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=9$ και $\vec{\beta}^2=|\vec{\beta}|^2=16$.

γ) $(3\vec{\alpha}-\beta)\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})=3\vec{\alpha}^2-9\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=3\cdot9-10\cdot6+3\cdot16=15$.

15073.α) $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2(1,2)+(2,3)=(4,7)$.

β) $|\vec{\gamma}|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$.

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=1\cdot4+2\cdot7=18$.

15186.α) Είναι $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 4,\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 2$, άρα Μ(4,2).

Είναι $x_N = \dfrac{x_\Gamma + x_\Delta}{2} = 5,\ y_N = \dfrac{y_\Gamma + y_\Sigma}{2} = 0$, άρα Ν(5,0).

β) $\overrightarrow{MN} = (5-4, 0-2) = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (9-1, 2+2) = (8,4)$

γ) Είναι $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 1\cdot 8 - 2\cdot 4 = 8-8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

15252.α) $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = (3,-1) - (2,1) = (3-2, -1-1) = (1,-2)$.

β) Είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ και

$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

Επειδή $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

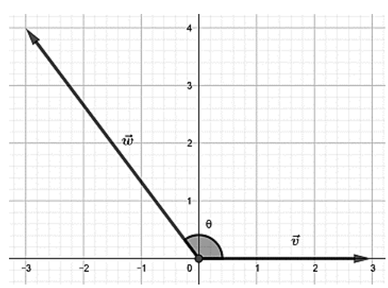
Είναι $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2 = 5 + 5 = 10 = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ.

γ) Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β, ισχύει ότι

$(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right| = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$.

15317.α) Είναι $\det\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, οπότε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν είναι παράλληλα.

β) i.



ii. Με βάση το σχήμα στο βi) ερώτημα, η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι αμβλεία.

15379.α) Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(1,3)$ έχει $x_1=1$ και $y_1=3$. Το διάνυσμα $\vec{\beta}=(3,-1)$ έχει $x_2=3$ και $y_2=-1$.

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=3-3=0$.

Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

β) Είναι $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2(1,3)-(3,-1)=(2,6)-(3,-1)=(-1,7)$.

15463.α) $\overrightarrow{ΒΓ}=\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΒ}=(3,-1)-(2,1)=(3-2,-1-1)=(1,-2)$.

β) $\overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}=2\cdot1+1\cdot(-2)=2-2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{ΑΒ}\perp\overrightarrow{ΒΓ}$.

γ) $\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},\ \left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$, άρα $\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|=\left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|$.

15658.α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot1+(-2)\cdot1=2-2=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) i. Είναι $\vec{\alpha}=\overrightarrow{ΚΑ}\Leftrightarrow(2,-2)=(x_Α-x_Κ,y_Α-y_Κ)\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_Α-2=2\\y_Α-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_Α=4\\y_Α=-1\end{cases}$, άρα $Α(4,-1)$.

Είναι $\vec{\beta}=\overrightarrow{ΚΒ}\Leftrightarrow(1,1)=(x_Β-x_Κ,y_Β-y_Κ)\Leftrightarrow\begin{cases}x_Β-2=1\\y_Β-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_Β=3\\y_Β=2\end{cases}$, άρα $Β(3,2)$.

ii. Είναι $\overrightarrow{ΑΒ}=(3-4,2+1)=(-1,3)$ και $\overrightarrow{ΑΓ}=(x_Γ-4,y_Γ+1)$

Επειδή τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$ είναι παράλληλα, οπότε:

$\det\left(\overrightarrow{ΑΒ},\overrightarrow{ΑΓ}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-1 & 3\\x_Γ-4 & y_Γ+1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-y_Γ-1-3x_Γ+12=0\Leftrightarrow$

$3x_Γ+y_Γ=11$.

iii. $\left|\overrightarrow{K\Gamma}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x_\Gamma - 2\right)^2 + \left(y_\Gamma - 1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(4-3\right)^2 + \left(2+1\right)^2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{\left(x_\Gamma - 2\right)^2 + \left(y_\Gamma - 1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\left(x_\Gamma - 2\right)^2 + \left(y_\Gamma - 1\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot 10 \Leftrightarrow x_\Gamma^2 - 4x_\Gamma + 4 + \left(11 - 3x_\Gamma - 1\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$x_\Gamma^2 - 4x_\Gamma + 4 + \left(10 - 3x_\Gamma\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$x_\Gamma^2 - 4x_\Gamma + 4 + 100 - 60x_\Gamma + 9x_\Gamma^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 10x_\Gamma^2 - 64x_\Gamma + \frac{203}{2} = 0$ (1).

Η (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 36 και ρίζες

$x_1 = \frac{7}{2} = 3{,}5,\ x_2 = \frac{29}{10} = 2{,}9$.

Επειδή το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος ΑΒ, η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4 .

Άρα $x_\Gamma = 3{,}5$ και $3\cdot 3{,}5 + y_\Gamma = 11 \Leftrightarrow y_\Gamma = 0{,}5$.

15825.α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2\cdot 4\cdot \text{συν}\frac{\pi}{3} = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$.

β) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\alpha}\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \left|\vec{\alpha}\right|^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

γ) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\gamma} \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

15852.α) $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2\left(3,2\right) + 3\left(-2,1\right) = \left(6,4\right) + \left(-6,3\right) = \left(0,7\right)$.

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 3\cdot\left(-2\right) + 2\cdot 1 = -6 + 2 = -4$, $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = 3\cdot 0 + 2\cdot 7 = 14$.

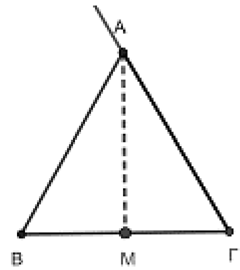
15996.α) $\overrightarrow{AB} = \left(8 - \left(-6\right), 7 - \left(-1\right)\right) = \left(14,8\right)$,

$\overrightarrow{B\Gamma} = \left(-10 - 8, 6 - 7\right) = \left(-18,-1\right)$ και

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \left(14,8\right) + \left(-18,-1\right) = \left(-4,7\right)$.

β) Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = \left(-10 - \left(-6\right), 6 - \left(-1\right)\right) = \left(-4,7\right)$ και

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 14\cdot\left(-4\right) + 8\cdot 7 = -56 + 56 = 0$, άρα $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε η γωνία Α είναι ορθή.



16141.α) i. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=60^{\circ}$.

ii. $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=90^{\circ}$.

iii. $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)=180^{\circ}-MA\Gamma=180^{\circ}-30^{\circ}=150^{\circ}$.

iv. $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{\Gamma M}\right)=180^{\circ}$ (είναι αντίρροπα) .

v. $\left(\overrightarrow{\Gamma M},\overrightarrow{\Gamma B}\right)=0^{\circ}$ (είναι ομόρροπα) .

β) i. $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε:

$$AM^2=A\Gamma^2-M\Gamma^2=10^2-5^2=100-25=75\Leftrightarrow AM=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{\Gamma A}\right)\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=5\sqrt{3}\cdot10\sigma\upsilon\nu150^{\circ}=50\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-75\ .$$

iii. $\overrightarrow{\Gamma M}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\left|\overrightarrow{\Gamma M}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|=5\cdot10=50$.

16144.α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Delta}\right)=4\cdot4\cdot\frac{1}{2}=8$.

β) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu0=4\cdot4=16$

γ) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{AO}=0$ γιατί $\overrightarrow{O\Delta}\perp\overrightarrow{AO}$.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ έχει ΑΒ=ΑΔ και $A=60^{\circ}$, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οπότε $B\Delta=AB=A\Delta=4$.

Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του , οπότε ΒΟ = ΟΔ = 2.

$$\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{O\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\sigma\upsilon\nu180^{\circ}=2\cdot2(-1)=-4\ .$$

ε) $\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|\sigma\upsilon\nu120^{\circ}=4\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$.

16426.α) $\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\left|\vec{\alpha}\right|^2-\left(2\cdot(-3)-1\cdot2\right)\Leftrightarrow$

$$\vec{\alpha}\cdot\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=2\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^2-(-8)=2\cdot5+8=18\ .$$

β) Έστω $\vec{\gamma}=(x,y)$, τότε: $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow 2x-y=0\Leftrightarrow y=2x\ (1)$ και

$|\vec{\gamma}|=\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}\Leftrightarrow x^2+y^2=5\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x^2+(2x)^2=5\Leftrightarrow x^2+4x^2=5\Leftrightarrow$
$5x^2=5\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

Αν $x=1$ τότε $y=2$ και $\vec{\gamma}=(1,2)$, ενώ αν $x=-1$ τότε $y=-2$ και $\vec{\gamma}=(-1,-2)$.

16427. α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(0-(-2),8-3)=(2,5)$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(10-5,5-3)=(5,2)$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\cdot5+5\cdot2=20$.

β) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(5,2)+(2,5)=(7,7)$.

Είναι $\lambda_{\vec{u}}=\frac{7}{7}=1$ επομένως εφω = 1, άρα $\omega=\frac{\pi}{4}$.

16428.α) $|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|\Leftrightarrow|3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$

$(3\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})^2\Leftrightarrow 9\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\cancel{4\vec{\beta}^2}=\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\cancel{4\vec{\beta}^2}\Leftrightarrow$

$8\vec{\alpha}^2+16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8\cdot\frac{3}{4}\Leftrightarrow16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-6\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\frac{3}{8}$.

β) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=-\frac{12}{8\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sigma\upsilon\nu30^\circ$,

άρα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

17075.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι Α(2,3), Β(6,0) και Γ(2,1).

Είναι $\overrightarrow{AB}=(6-2,0-3)=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(2-2,1-3)=(0,-2)$.

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=4\cdot0-3\cdot(-2)=6$.

20685.α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(\beta+1,-2)$ και

$\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\beta+1-2=0\Leftrightarrow\beta=1$.

Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(0+1,\gamma-2)=(1,\gamma-2)$ και

β) $\vec{w}//\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow \det\left(\vec{w},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & \gamma-2 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -10(\gamma-2)-2=0\Leftrightarrow$

$-10\gamma+20-2=0\Leftrightarrow -10\gamma=-18\Leftrightarrow \gamma=\frac{9}{5}$.

γ) Για β =1 και $\gamma=\frac{9}{5}$ είναι $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(1,-\frac{1}{5}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot 1-2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=2+\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$

20732.α) $\vec{\beta}=(-8,-4)=-4(2,1)=-4\vec{\alpha}\Rightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$,

$\vec{\beta}=-4\vec{\alpha}\Rightarrow\left|\vec{\beta}\right|=\left|-4\vec{\alpha}\right|=4\left|\vec{\alpha}\right|$.

β) Επειδή $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ είναι $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=180^\circ$.

γ) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot(-8)+1\cdot(-4)=-16-4=-20<0$.

20733. α) $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{\beta}$.

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-\left|\vec{\beta}\right|^2=0$.

γ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$.

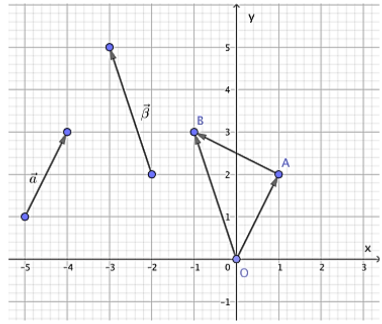
20773.α) $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2(1,-2)+(2,3)=(4,-1)$.
β) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow 4\cdot 1-1\cdot\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=4$.
γ) Για κ = 4 είναι $\vec{v}=(1,4)$ και $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

20888.α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=4\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$.

β) $\left|\vec{\gamma}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9\vec{\beta}^2=4\left|\vec{\alpha}\right|^2+12(-10)+9\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$

$\left|\vec{\gamma}\right|^2=4\cdot 16-120+9\cdot 25=169\Leftrightarrow\left|\vec{\gamma}\right|=13$.

20914.α)



β) $\vec{\alpha}=\overrightarrow{OA}=(1,2)$, $\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}=(-1,3)$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-1,3)-(1,2)=(-2,1)$

γ) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=1\cdot(-2)+2\cdot 1\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-2+2=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$, άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

21682.α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,2)$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(-5,-10)$ προκύπτει:

$2\vec{\alpha}=(11,2)+(-5,-10)\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}=(6,-8)\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\dfrac{1}{2}(6,-8)=(3,-4)$.

Είναι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(11,2)\Leftrightarrow\vec{\beta}=(11,2)-\vec{\alpha}=(11,2)-(3,-4)=(8,6)$.

β) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\cdot 8+(-4)\cdot 6=24-24=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

$|\vec{\beta}|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{100}=10$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, άρα $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$.

22040.α) Έστω $\vec{\beta}=(x,y)$, τότε

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow -4x+3y=0\Leftrightarrow 3y=4x\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x$.

Για x=3 είναι y=4, οπότε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ είναι το $\vec{\beta}=(3,4)$.

β) Έστω $\vec{\gamma}=(x_1,y_1)$, τότε $|\vec{\gamma}|=1\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+y_1^2}=1\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=1\ (1)$.

Είναι $\vec{\gamma}\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow -4x_1+3y_1=0\Leftrightarrow y_1=\dfrac{4}{3}x_1$ (2).

Από τις (1), (2) έχουμε:

$x_1^2+\left(\dfrac{4}{3}x_1\right)^2=1\Leftrightarrow x_1^2+\dfrac{16}{9}x_1^2=1\Leftrightarrow 9x_1^2+16x_1^2=9\Leftrightarrow 25x_1^2=9\Leftrightarrow$

$x_1^2=\dfrac{9}{25}\Leftrightarrow x_1=\pm\dfrac{3}{5}$.

Για $x_1=\dfrac{3}{5}$ είναι $y_1=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$, οπότε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι το

$\vec{\gamma}=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

22170. α) $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=(-1,3)-2\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\vec{u}=(-1,3)+(4,1)=(-1+4,3+1)=(3,4)$.

β) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow 3x^2+4(x-1)=0\Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0$

Η εξίσωση έχει Δ = 64 και ρίζες $x=\frac{2}{3}$, $x=-2$.

γ) $\vec{v}//\vec{\beta}\Leftrightarrow \det\left(\vec{v},\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ -2 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2-(-2)(x-1)=0\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}x^2+2x-2=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-2)^2=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

22554. α) i.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=6\vec{i}-\vec{j}-\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)=6\vec{i}-\vec{j}-3\vec{i}-2\vec{j}=3\vec{i}-3\vec{j}$

ii. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\left(2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\left(2\left(3\vec{i}+2\vec{j}\right)-\left(6\vec{i}-\vec{j}\right)\right)=\frac{1}{5}\left(6\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{i}+\vec{j}\right)=\frac{1}{5}\cdot 5\vec{j}=\vec{j}$

β) Είναι $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-3\vec{j}=(3,-3)$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{j}=(0,1)$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=3\cdot 0-3\cdot 1=-3$.

4ο Θέμα

15042.α) $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{M\Gamma}$ άρα $\overrightarrow{MB}//\overrightarrow{M\Gamma}$ οπότε τα σημεία Μ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{M\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{\Gamma M}$ άρα το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

γ) i. Επειδή τα Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, οπότε ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa\neq 0$ τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{\lambda}{\kappa}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο, άρα κ = 0.

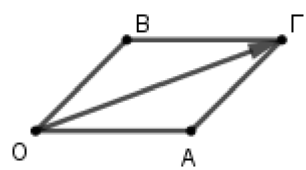
Αν $\lambda\neq 0$ τότε $\lambda\overrightarrow{AB}=\kappa\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{\kappa}{\lambda}\overrightarrow{A\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$ άτοπο άρα λ = 0.

Επομένως κ = λ = 0.

ii. Επειδή $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\kappa=0$ είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

Είναι $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\lambda=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$, δηλαδή η διάμεσος ΑΜ του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ, δηλαδή είναι και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ.

15320.α) i. Από τον κανόνα παραλληλογράμμου είναι



$\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, οπότε

$\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$ και

$\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\Leftrightarrow$

$\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

ii. $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2=\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)^2=\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

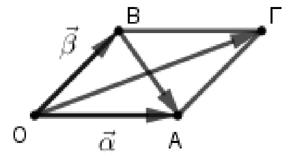
β) Αν $\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ τότε το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ έχει ίσες διαγώνιες και είναι ορθογώνιο.

18520.α)

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2+\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2+\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2\vec{\alpha}^2+2\vec{\beta}^2=2\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\left|\vec{\beta}\right|^2.$$

β) i. Από τον κανόνα παραλληλογράμμου είναι

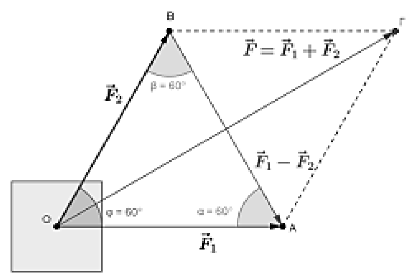


$\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και

$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

ii. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

γ) Είναι $\left|\vec{F}_1\right|=\left|\vec{F}_2\right|=10$.



Αν $\vec{F}$ η συνισταμένη δύναμη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ τότε $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$,

$\left|\vec{F}\right|=\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2\right|$ και

$$\left|\vec{F}\right|^2=\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2\right|^2=\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{F}\right|^2=\vec{F}_1^{\,2}+2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2+\vec{F}_2^{\,2}\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{F}\right|^2=\left|\vec{F}_1+\vec{F}_2\right|^2=\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)^2=\left|\vec{F}_1\right|^2+2\left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{F}_2\right|\sigma\upsilon\nu 60^\circ+\left|\vec{F}_2\right|^2\Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{F}\right|^2=10^2+2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}+10^2=300\Leftrightarrow\left|\vec{F}\right|=\sqrt{300}=10\sqrt{3}\,\text{N}.$$

18547.α) i. Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β και Γ τρίγωνο πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι

$\overrightarrow{AB}=\left(\lambda-0,1+1\right)=\left(\lambda,2\right)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\lambda-2-0,\lambda-3+1\right)=\left(\lambda-2,\lambda-2\right)$.

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα όταν

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq 0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\lambda\left(\lambda-2\right)-2\left(\lambda-2\right)\neq 0\Leftrightarrow\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-2\right)\neq 0\Leftrightarrow\left(\lambda-2\right)^2\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 2.$$

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α όταν

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-2)+2(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)=0 \Leftrightarrow$

$(\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ απορρίπτεται$)$ ή $(\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2)$.

β) i. Για $\lambda=-2$ είναι $\overrightarrow{AB}=(-2,2)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-4,-4)$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0$.

ii. Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -4 & -4\end{vmatrix}=8+8=16$ και

$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot 16=8$.

20938.α)

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(|\vec{\alpha}|-4)^2+(|\vec{\alpha}|-2)^2} \Leftrightarrow \cancel{|\vec{\alpha}|^2}=\cancel{|\vec{\alpha}|^2}-8|\vec{\alpha}|+16+|\vec{\alpha}|^2-4|\vec{\alpha}|+4 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2-12|\vec{\alpha}|+20=0$.

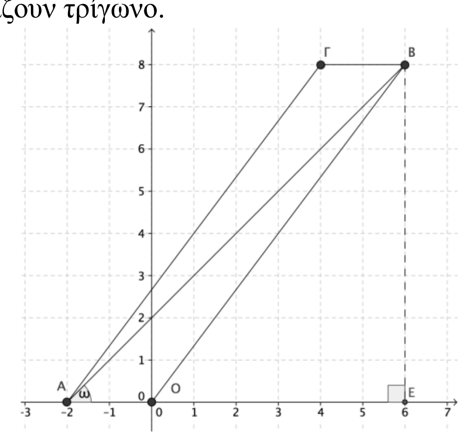
Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ= 64 και ρίζες

$|\vec{\alpha}|=10$ ή $|\vec{\alpha}|=2$.

Αν $|\vec{\alpha}|=10$, τότε $\vec{\alpha}=(10-4,10-2)=(6,8)=\overrightarrow{OB}$ απορρίπτεται γιατί τα σημεία Α, Β ταυτίζονται και δεν ορίζουν τρίγωνο.

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, τότε $\vec{\alpha}=(2-4,2-2)=(-2,0)$, $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 6 & 8\end{vmatrix}=-16\neq 0$,

δεκτό αφού τα σημεία Ο,Α, Β ορίζουν τρίγωνο.



β) Έστω Γ(x, y). Επειδή

$\overrightarrow{OB}=(6,8)$, είναι Β(6,8).

Το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι παραλληλόγραμμο όταν

$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow$

$(x-6,y-8)=(-2,0) \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x-6=-2\\ y-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases}$, άρα

Γ(4, 8).

γ) Είναι $\overrightarrow{AO}=(2,0)$ και

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6,8)-(-2,0)=(8,8)$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}\right)=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2\cdot 8+0\cdot 8}{\sqrt{2^2+0^2}\cdot\sqrt{8^2+8^2}}=\frac{16}{2\sqrt{2\cdot 64}}=\frac{16}{16\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}\right)=45^\circ$.

22063.α) i. $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|\vec{\alpha}|+\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(|\vec{\alpha}|+\left|\vec{\beta}\right|\right)^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$

$\cancel{\vec{\alpha}^2}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\cancel{\vec{\beta}^2}=\cancel{\vec{\alpha}^2}+2|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|+\cancel{\vec{\beta}^2}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left||\vec{\alpha}|-\left|\vec{\beta}\right|\right|\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(|\vec{\alpha}|-\left|\vec{\beta}\right|\right)^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-2|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$

$\cancel{\vec{\alpha}^2}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\cancel{\vec{\beta}^2}=\cancel{\vec{\alpha}^2}-2|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|+\cancel{\vec{\beta}^2}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

β) i. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=-\vec{\beta}\Rightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=\left|-\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=2$, όμως

$|\vec{\alpha}|+|\vec{\gamma}|=1+1=2$, άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\gamma}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$.

ii. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}\Rightarrow\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=|-\vec{\gamma}|=|\vec{\gamma}|=1$, όμως

$\left||\vec{\alpha}|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=|1-2|=1$, άρα $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left||\vec{\alpha}|-\left|\vec{\beta}\right|\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

iii. Επειδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|$, είναι $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}$

Επειδή $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$ και $\left|\vec{\beta}\right|=2|\vec{\alpha}|$, είναι $\vec{\beta}=-2\vec{\alpha}$.

22064.α) i. είναι αριθμοί
ii. επειδή είναι αριθμοί μπορούν να συγκριθούν.
β) Σωστή είναι η iii, γιατί $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{\Delta\Gamma}$
που ισχύει.
γ) Επειδή τα σημεία Γ, Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο κέντρου Α, είναι
$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου. Είναι
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu 25^\circ=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\rho\sigma\upsilon\nu 25^\circ$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu 40^\circ=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\rho\sigma\upsilon\nu 40^\circ$.
Είναι $\sigma\upsilon\nu 25^\circ>\sigma\upsilon\nu 40^\circ\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\rho\sigma\upsilon\nu 25^\circ>\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\rho\sigma\upsilon\nu 40^\circ\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}>\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$.
Σωστή απάντηση είναι η i.

3ο Θέμα

18243.α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 2\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2} = 4$.

β) $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta} = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 =$

$2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 2\cdot 4 - 4 - 16 = -12$.

γ) $|\vec{\gamma}|^2 = \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 8 + |\vec{\beta}|^2 = 4 - 8 + 16 = 12 \Leftrightarrow$

$|\vec{\gamma}| = \sqrt{22} = 2\sqrt{3}$

$|\vec{\delta}|^2 = \left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 16 + |\vec{\beta}|^2 = 16 + 16 + 16 = 48 \Leftrightarrow$

$|\vec{\delta}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

δ) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}}\right) = \dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\gamma}||\vec{\delta}|} = \dfrac{-12}{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}} = -\dfrac{3}{2\left(\sqrt{3}\right)^2} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}}\right) = 120^\circ$.

Ευθεία

Εξίσωση ευθείας

2ο Θέμα

15027.α) Είναι $\lambda_{AB}=\frac{5+1}{3-1}=3$.

β) Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+5}{2}=2$, άρα M(2,2).

γ) Αν μ η μεσοκάθετος του ΑΒ, τότε $\lambda_{AB}\lambda_{\mu}=-1\Leftrightarrow 3\lambda_{\mu}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\mu}=-\frac{1}{3}$.

Η ευθεία μ έχει εξίσωση: $y-2=-\frac{1}{3}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$.

15044.α) i. $\lambda_{AB}=\frac{-1-5}{6-0}=-1$

ii. Είναι $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+6}{2}=3$, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5-1}{2}=2$, άρα $M(3,2)$.

β) Έστω μ η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Τότε $\lambda_{\mu}\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\mu}=1$ και η μ έχει εξίσωση: $y-2=x-3\Leftrightarrow y=x-1$.

15271.α) $\lambda_{AB}=\frac{6-2}{1+3}=1$.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: $y-6=1(x-1)\Leftrightarrow y=x+5$.

γ) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν:
$-7=-13+5\Leftrightarrow -7=-8$ αδύνατο. Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

15986.α) i. $\lambda_{AB}=\frac{3-1}{2-1}=2$.

ii. Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση: $y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$

β) Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ αν και μόνο αν:
$5=2\cdot 2^{100}-1\Leftrightarrow 6=2^{101}$ αδύνατο. Άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην ΑΒ.

16002.α) $x_M = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{5 + x_B}{2} \Leftrightarrow 6 = 5 + x_B \Leftrightarrow x_B = 1$ και

$y_M = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 + y_B = 1 \Leftrightarrow y_B = -1$, άρα $B(1,-1)$.

β) $(B\Gamma) = \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

γ) Είναι $y + 2 = \frac{2+2}{5-3}(x-3) \Leftrightarrow y = 2x - 6 - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 8$.

18236.α) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -x + 4 = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -2x + 8 = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ -2x + x = 4 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ -x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 + 4 = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$, άρα Γ(4,0).

β) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι $\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-5}{4+1} = -1$.

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε

$\lambda_{A\Gamma}\lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow -\lambda_{B\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = 1$.

Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι: $y - 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 1$.

18351.α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$, άρα $M(1,4)$.

β) $\lambda_{AB} = \frac{3-5}{3+1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

γ) Έστω μ η μεσοκάθετη του τμήματος ΑΒ. Τότε

$\lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \lambda_\mu = 2$ και η μ έχει εξίσωση:

$y - 4 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

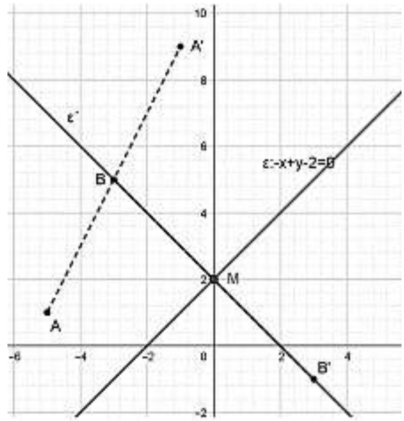
21662.Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς το Β. Τότε το σημείο Β θα είναι το μέσο του ΑΑ΄ οπότε:

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow -3 = \frac{-5 + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow$$

$-6 = -5 + x_{A'} \Leftrightarrow x_{A'} = -1$ και

$$y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{1 + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow$$

$10 = 1 + y_{A'} \Leftrightarrow y_{A'} = 9$, άρα Α΄(- 1,9).



β) i. Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{-1}{1} = 1$ και

$\varepsilon' \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'}\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} = -1$.

Η ε΄ έχει εξίσωση: $y - 5 = -(x+3) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

ii. Έστω Μ το σημείο τομής των ευθειών ε, ε΄. Οι συντεταγμένες του του Μ, θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των ε, ε΄.

$$\begin{cases} -x + y - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - x + 2 - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ άρα}$$

Μ(0,2).

iii. Αν Β΄ είναι το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ε, τότε το Β΄ είναι σημείο της ευθείας ε΄ και το Μ θα είναι το μέσο του ΒΒ΄ οπότε:

$$x_M = \frac{x_{B'} + x_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{x_{B'} - 3}{2} \Leftrightarrow x_{B'} - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{B'} = 3 \text{ και}$$

$$y_M = \frac{y_{B'} + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{y_{B'} + 5}{2} \Leftrightarrow y_{B'} + 5 = 4 \Leftrightarrow y_{B'} = -1, \text{ άρα } B'(3,-1).$$

20868.α) $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

β) ε: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Για y = 0 η εξίσωση της ε γίνεται $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$,

άρα $\Gamma(-1,0)$.

21162.α) Είναι $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2-6}{2} = -2$, άρα $M(1,-2)$.

β) $\lambda_{AB} = \dfrac{-6-2}{-1-3} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

γ) Είναι $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\dfrac{1}{2}$

Η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση

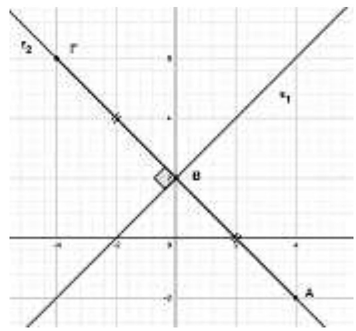
$y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

21964.α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση: $y = x + 2$, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$.Είναι

$\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1 \Leftrightarrow \lambda_2\lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_2 = -1$.

Η ε_2 έχει εξίσωση:

$y + 2 = -1(x-4) \Leftrightarrow y = -x + 2$



β) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής Β, των δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x+2 \\ y = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ x+2 = -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+2 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases},$$

άρα Β(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του Α ως προς το Β τότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ,

οπότε: $x_B = \dfrac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{4 + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 4 + x_\Gamma = 0 \Leftrightarrow x_\Gamma = -4$ και

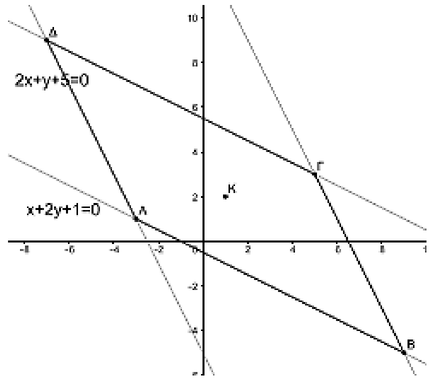
$y_B = \dfrac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{-2 + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -2 + y_\Gamma = 4 \Leftrightarrow y_\Gamma = 6$, άρα $\Gamma(-4,6)$.

22047.α) Είναι $A_1A_2 // A_3A_4 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_3$ και $A_2A_3 // A_4A_1 \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_4$.

β) Είναι $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_4} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1 + 1 = 2$.

22049.α) Είναι $A_1A_2 \perp A_2A_3 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$, $A_2A_3 \perp A_3A_4 \Leftrightarrow \lambda_2\lambda_3 = -1$, $A_3A_4 \perp A_4A_1 \Leftrightarrow \lambda_3\lambda_4 = -1$ και $A_4A_1 \perp A_1A_2 \Leftrightarrow \lambda_4\lambda_1 = -1$.

β) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -1-1-1-1 = -4$.



22071.α) i. Το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΔ είναι το σημείο Α, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2y-1 \\ 2(-2y-1)+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2y-1 \\ -4y-2+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-2y-1 \\ -3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-1=-3 \\ y=1 \end{cases}.$$ Άρα $A(-3,1)$.

ii. Το σημείο Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ.

Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-3+x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow -3 + x_\Gamma = 2 \Leftrightarrow x_\Gamma = 5 \text{ και}$$

$$y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1+y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 + y_\Gamma = 4 \Leftrightarrow y_\Gamma = 3,$$ Άρα Γ(5,3).

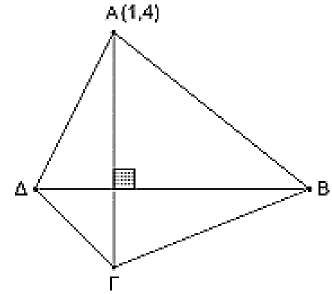
β) Η πλευρά ΒΓ διέρχεται από το σημείο Γ(5,3) και ΒΓ//ΑΔ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι

$2x+y+5=0 \Leftrightarrow y=-2x-5$ με $\lambda_{A\Delta}=-2$, άρα $\lambda_{B\Gamma}=-2$, οπότε η εξίσωση της ΒΓ είναι:

$y-3=-2(x-5) \Leftrightarrow y=-2x+13$.

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το Γ(5,3) και ΓΔ//ΑΒ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι x+2y+1=0 με $\lambda_{AB}=-\frac{1}{2}$, άρα $\lambda_{\Gamma\Delta}=-\frac{1}{2}$, , οπότε η εξίσωση της ΓΔ είναι: $y-3=-\frac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$.

22092.α) Οι συντεταγμένες της κορυφής Δ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΒΔ που διέρχονται από το σημείο αυτό.



$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 2(x+2) + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 2x - 4 + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 2 = 1 \end{cases}, \text{ άρα } \Delta(-1,1).$$

β) Είναι $\lambda_{B\Delta} = 1$ και $B\Delta \perp A\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta}\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -1$.

Η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι $y - 4 = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 5$

22173.α) i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΒΓ δίνονται από τους τύπους $x_\Delta = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$ και $y_\Delta = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$, άρα Δ(4,2).

ii. Έστω Ζ(x, y). Τότε

$$\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow (x-0, y-4) = \frac{3}{4}(4-0, 0-4) \Leftrightarrow (x, y-4) = \frac{3}{4}(4,-4) \Leftrightarrow$$

$$(x, y-4) = (3,-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y - 4 = -3 \Leftrightarrow y = 1 \end{cases}, \text{ άρα } Z(3,1).$$

β) Είναι $\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-4}{4-0} = -1$, $\lambda_{Z\Delta} = \frac{2-1}{4-3} = 1$. Επειδή $\lambda_{A\Gamma}\lambda_{Z\Delta} = -1$ είναι $A\Gamma \perp Z\Delta$.

4ο Θέμα

14970.α) Για λ = 1 είναι $y = x - 2 + 1 - 2 \Leftrightarrow y = x - 3$ και για λ = 2 είναι $y = 2(x-2) + 2 - 2 = 2x - 4$

Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματός τους. Είναι

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 2x - 4 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 3 = -2 \\ x = 1 \end{cases}, \text{ άρα } M(1,-2).$$

β) Αρκεί οι συντεταγμένες του Μ να επαληθεύουν τις (1).

Είναι $\cancel{-2} = \lambda(1-2) + \lambda \cancel{-2} \Leftrightarrow 0 = -\lambda + \lambda$ ισχύει, άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από το Μ.

γ) i. Για y=0 είναι

$$0 = \lambda(x-2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda x - 2\lambda + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x = \lambda + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda+2}{\lambda},\ \lambda \neq 0$$

αφού η (1) τέμνει τους άξονες. Για x = 0 είναι $y = -2\lambda + \lambda - 2 = -\left(\lambda+2\right)$,

άρα $A\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}, 0\right)$ και $B\left(0, -\lambda-2\right)$.

ii. Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό:

$$E = \frac{1}{2}\left(OA\right)\left(OB\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{\lambda+2}{\lambda}\right|\left|-\left(\lambda+2\right)\right| = \frac{\left|\lambda+2\right|^2}{2\left|\lambda\right|} = \frac{\lambda^2+4\lambda+4}{2\left|\lambda\right|}.$$

Είναι $E = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+4\lambda+4}{2\left|\lambda\right|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = \left|\lambda\right|$ (2)

Αν $\lambda < 0$ η (2) γίνεται:

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = -4$

Για $\lambda = -1$ είναι $y = x - 2 + 1 - 2 = x - 3$ δεκτή και για λ=- 4 είναι $y = -4(x-2) - 4 - 2 = -4x + 2$ δεκτή.

Αν $\lambda > 0$ η (2) γίνεται: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$ αδύνατη αφού έχει Δ< 0.

14978.α) $d_1 = \left(MA\right) = \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2}$ και

$d_2 = \left(MB\right) = \sqrt{\left(x-3\right)^2 + \left(y-3\right)^2}$.

β) Για να ανήκει το Μ στην μεσοκάθετο του ΑΒ πρέπει να ισαπέχει από τα άκρα του Α και Β δηλαδή να ισχύει $d_1 = d_2$.

γ) Είναι $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2} = \sqrt{\left(x-3\right)^2 + \left(y-3\right)^2} \Leftrightarrow$

$\left(x-1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = \left(x-3\right)^2 + \left(y-3\right)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} - 6y + 9 \Leftrightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$x + y - 4 = 0$.

δ) Για να είναι ισόπλευρο το τρίγωνο ΣΑΒ αρκεί $\left(AB\right) = \left(\Sigma A\right) = \left(\Sigma B\right)$ με Σ(x,y).

Είναι $(\Sigma A)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=d_1$, $(\Sigma B)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=d_2$

και $(AB)=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Άρα αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} d_1=(AB) \\ d_1=d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2} \\ x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=8 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(3-x)^2=8 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1+9-6x+x^2=8 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2-8x+2=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+1=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2} \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4\pm 2\sqrt{3}}{2} \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=2+\sqrt{3} \text{ ή } x=2-\sqrt{3} \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \text{ ή } x=2-\sqrt{3} \\ y=2-\sqrt{3} \text{ ή } y=2+\sqrt{3} \end{cases}.$$

Άρα το Σ είναι: $\Sigma\left(2+\sqrt{3}\ ,\ 2-\sqrt{3}\right)$ ή $\Sigma\left(2-\sqrt{3}\ ,\ 2+\sqrt{3}\right)$.

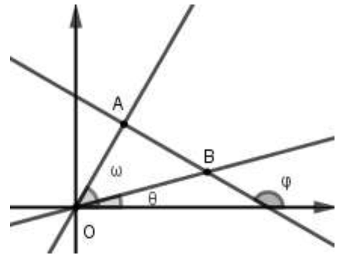
15029.α) Είναι $\lambda_{OA}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}=\varepsilon\varphi 60^\circ \Leftrightarrow \omega=60^\circ$, οπότε η ΟΑ έχει εξίσωση $y=\sqrt{3}x$.

β) Είναι

$$\lambda_{AB}=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi=-\varepsilon\varphi 30^\circ=\varepsilon\varphi 150^\circ \Leftrightarrow \varphi=150^\circ.$$

Η ΑΒ έχει εξίσωση: $y-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Είναι $\lambda_{OA}\lambda_{AB}=\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1\Leftrightarrow OA\perp AB\Leftrightarrow \hat{A}=90^\circ$.



Είναι $(OA)=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}=2$ και

$(AB)=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}\right)^2}=2$

, άρα (ΟΑ)=(ΑΒ) οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$.

δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,είναι $AOB=45^\circ$.

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ΟΒ με τον xx′, είναι

$\theta=\omega-AOB=60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

Η ευθεία ΟΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_{OB}=\dfrac{\sqrt{3}+1-0}{\sqrt{3}-1-0}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 15^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

15275.α) i. Η ε έχει εξίσωση: $y-1=\lambda(x-2)\Leftrightarrow y=\lambda x+1-2\lambda$.

ii. Η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες όταν δεν είναι παράλληλη στον x΄x, άρα $\lambda\neq 0$ και όταν δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή όταν $1-2\lambda\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq\dfrac{1}{2}$.

β) i. Για y = 0 η ε γίνεται $0=\lambda x+1-2\lambda\Leftrightarrow \lambda x=1-2\lambda\Leftrightarrow x=\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}$, άρα $A\left(\dfrac{1-2\lambda}{\lambda},0\right)$.

Για x = 0 είναι y = 1 – 2λ, άρα $B(0,1-2\lambda)$.

Είναι $(OA)=\left|\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}\right|$ και $(OB)=|1-2\lambda|$.

ii. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές όταν

$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\left|\dfrac{1-2\lambda}{\lambda}\right|=|1-2\lambda|\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{|1-2\lambda|}}{|\lambda|}=\cancel{|1-2\lambda|}\Leftrightarrow 1=|\lambda|\Leftrightarrow\lambda=\pm 1$

iii. Για λ = 1 είναι $(OA)=\left|\dfrac{1-2}{1}\right|=1$, $(OB)=|1-2|=1$, οπότε

$(OAB)=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}$ τ.μ..

Αν $\lambda=-1$ είναι $(\mathrm{OA})=\left|\dfrac{1+2}{-1}\right|=3,\ (\mathrm{OB})=|1+2|=3$, οπότε

$(\mathrm{OAB})=\dfrac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})=\dfrac{9}{2}$ τ.μ..

16003.α) Για α = 0 είναι $-4x+4=0\Leftrightarrow x=1$ και για α = 1 είναι $-3x-2y+5=0$.

Οι συντεταγμένες του Μ είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases}x=1\\-3x-2y+5=0\end{cases}$.

Είναι $\begin{cases}x=1\\-3x-2y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\-3-2y+5=0\end{cases}\begin{cases}x=1\\-2y=-2\end{cases}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, άρα οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο Μ(1, 1).

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο Μ(1, 1) .

Με x = y = 1 η αρχική εξίσωση γράφεται $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο Μ.

γ) i. Οι ευθείες που προκύπτουν όταν α = 4 ή α = 0 δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον $x'x$ και η δεύτερη στον $y'y$. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 4$.

Για x = 0 είναι $y=\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}$ και για y = 0 είναι $x=-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία με τους άξονες είναι τα

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4},0\right)$ και $\mathrm{B}\left(0,\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$.Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν:

$$\begin{cases}-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4}>0\\[2mm]\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\alpha+4)(\alpha-4)<0\\2\alpha(\alpha+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<\alpha<4\\\alpha<-4 \text{ ή } \alpha>0\end{cases}.$$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει 0 < α < 4 που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν 0 < α < 4 τα σημεία Α, Β είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε
$(\mathrm{OA})=-\dfrac{\alpha+4}{\alpha-4}$ και $(\mathrm{OB})=\dfrac{\alpha+4}{2\alpha}$, οπότε
$(\mathrm{OA})=2(\mathrm{OB})\Leftrightarrow -\dfrac{\cancel{\alpha+4}}{\alpha-4}=\cancel{2}\,\dfrac{\cancel{\alpha+4}}{\cancel{2}\alpha}\Leftrightarrow -\alpha=\alpha-4\Leftrightarrow 4=2\alpha\Leftrightarrow \alpha=2$.

17078.α) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\alpha-2\alpha}{4-3}=-\alpha$ και η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση
$y-\alpha=-\alpha(x-4)\Leftrightarrow y=-\alpha x+5\alpha$.
ii. Το σημείο Γ βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ όταν
$1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha\Leftrightarrow 1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha\Leftrightarrow$
$\alpha^2-5\alpha+1=0\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.
Το σημείο Δ βρίσκεται στην ευθεία ΑΒ όταν
$1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha\Leftrightarrow \alpha^2-5\alpha+1=0\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.
iii. Είναι $\overrightarrow{AB}=(4-3,\alpha-2\alpha)=(1,-\alpha)$ και
$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(\alpha+1-\alpha,1-\alpha-1)=(1,-\alpha)$.
Αν $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τότε τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία ΑΒ και επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε $\alpha\neq\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ και
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\Leftrightarrow\sqrt{1^2+(-\alpha)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(1-2\alpha)^2}\Leftrightarrow \cancel{1}+\cancel{\alpha^2}=\cancel{\alpha^2}-6\alpha+9+\cancel{1}-4\alpha+4\alpha$

$4\alpha^2-10\alpha+9=0$.
Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα Δ = -44 < 0 άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

18568.α) Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{0-4}{-1-2}=\dfrac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{-2-4}{3-2}=-6$.

Επειδή $\lambda_{AB}\neq\lambda_{A\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι
συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) i. Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση:

$y=\dfrac{4}{3}(x+1)\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$ και για

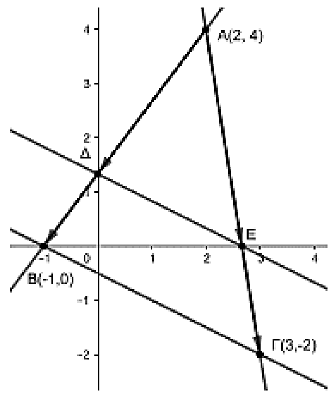
x = 0 γίνεται $y=\dfrac{4}{3}$, άρα $\Delta\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση

$y-4=-6(x-2)\Leftrightarrow y=-6x+16$

και για y = 0 γίνεται

$0=-6x+16\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$, άρα $E\left(\dfrac{8}{3},0\right)$.



ii. Είναι

$\overrightarrow{A\Delta}=\left(0-2,\dfrac{4}{3}-4\right)=\left(-2,-\dfrac{8}{3}\right)=2\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$ και

$\overrightarrow{\Delta B}=\left(-1-0,0-\dfrac{4}{3}\right)=\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$, άρα $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{\Delta B}$.

Είναι $\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{8}{3}-2,0-4\right)=\left(\dfrac{2}{3},-4\right)=2\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$ και

$\overrightarrow{E\Gamma}=\left(3-\dfrac{8}{3},-2-0\right)=\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$, άρα $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) Είναι $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{0-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{8}{3}-0}=-\dfrac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{-2-0}{3+1}=-\dfrac{1}{2}$, άρα

$\lambda_{\Delta E}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow A\Delta//B\Gamma$.

22065.α) Επειδή $y_A=y_B=0$, τα σημεία Α, Β βρίσκονται στον άξονα x΄x. Επειδή $y_\Gamma=y_\Delta=4$ η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση y = 4 και είναι παράλληλη στον x΄x. Είναι (ΑΒ) = 8-0=8, (ΓΔ)=10-2=8.
Επειδή οι πλευρές ΑΒ , ΓΔ είναι ίσες και παράλληλες, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 4, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$, άρα Μ(4, 0).

Είναι $x_N = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = 9$, $y_N = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = 2$, άρα Ν(9, 2).

γ) Είναι $\lambda_{A\Gamma} = \frac{4-0}{10-0} = \frac{2}{5}$, οπότε η ΑΓ έχει εξίσωση

$y - 0 = \frac{2}{5}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}x$.

Είναι $\lambda_{\Delta M} = \frac{0-4}{4-2} = -2$, οπότε η ΔΜ έχει εξίσωση

$y - 0 = -2(x - 4) \Leftrightarrow y = -2x + 8$.

Είναι $\lambda_{\Delta N} = \frac{2-4}{9-2} = -\frac{2}{7}$, οπότε η ΔΝ έχει εξίσωση

$y - 4 = -\frac{2}{7}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{7}x + \frac{32}{7}$.

Το Κ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΔΜ, οπότε για τις συντεταγμένες του έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{5}x = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x = -10x + 40 \Leftrightarrow 12x = 40 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$$

και $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$, άρα $K\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Το Λ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΔΝ, οπότε για τις συντεταγμένες του έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x \\ y = -\frac{2}{7}x + \frac{32}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{5}x = -\frac{2}{7}x + \frac{32}{7} \Leftrightarrow 14x = -10x + 160 \Leftrightarrow$$

$24x = 160 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$ και $y = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{3} = \frac{8}{3}$, άρα $\Lambda\left(\frac{20}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

δ) Είναι $\left(\mathrm{AK}\right)=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-0\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{116}}{3}$,

$\left(\mathrm{K\Lambda}\right)=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-\frac{20}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{116}}{3}$ και

$\left(\Lambda\Gamma\right)=\sqrt{\left(10-\frac{20}{3}\right)^2+\left(4-\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{116}}{9}$. Επειδή (ΑΚ)=(ΚΛ)=(ΛΓ), τα Κ και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο ΑΓ.

3ο Θέμα

15178.α) i. Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν $\begin{cases}\mu+1=0\\ \mu+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=-1\\ \mu=-2\end{cases}$ που είναι άτοπο, άρα παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

ii. Για x = 0 και y = 0 είναι $\left(\mu+1\right)\cdot 0+\left(\mu+2\right)\cdot 0=0$, οπότε όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β) i. Η (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης όταν $\mu+2\neq 0\Leftrightarrow\mu\neq -2$, τότε $\lambda=-\frac{\mu+1}{\mu+2}$, οπότε $\lambda=0\Leftrightarrow-\frac{\mu+1}{\mu+2}=0\Leftrightarrow\mu+1=0\Leftrightarrow\mu=-1$. Τότε η (1) γίνεται $0\cdot x+\left(-1+2\right)y=0\Leftrightarrow y=0$ και είναι ο άξονας x΄x.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (1) δεν ορίζεται όταν $\mu+2=0\Leftrightarrow\mu=-2$, τότε η (1) γίνεται $\left(-2+1\right)x+0\cdot y=0\Leftrightarrow -x=0\Leftrightarrow x=0$ και είναι ο άξονας y΄y.

γ) Είναι $\lambda=\varepsilon\varphi 45^\circ\Leftrightarrow-\frac{\mu+1}{\mu+2}=1\Leftrightarrow-\mu-1=\mu+2\Leftrightarrow-2\mu=3\Leftrightarrow\mu=-\frac{3}{2}$.

Τότε η (1) γίνεται: $\left(-\frac{3}{2}+1\right)x+\left(-\frac{3}{2}+2\right)y=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\Leftrightarrow y=x$.

Γενική μορφή ευθείας
2ο Θέμα

15657.α) Αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ -2x+4y=4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5y=10 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}.$$

Άρα το κοινό τους σημείο Μ είναι το $M(2,2)$.

β) Αφού οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(2,2)$ τότε για να διέρχονται και οι τρεις ευθείες από το ίδιο σημείο πρέπει η $\varepsilon_3: 3x-y=4$ να διέρχεται από το Μ.
Για $x=2$ και $y=2$ είναι $3\cdot 2-2=4$ που ισχύει. Άρα και οι τρείς ευθείες διέρχονται από το Μ.

16766.α) Η (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{1}{-3}=\dfrac{1}{3}$ και η (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\dfrac{9}{3}=-3$ Είναι

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{3}(-3)=-1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

β) Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε: 10x = 10 ή x = 1
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 9x + 3y = 6 και έχουμε διαδοχικά:

$$9-3y=6 \Leftrightarrow 9-6=3y \Leftrightarrow 3y=3 \Leftrightarrow y=1$$

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι το A(1, − 1).

γ) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $x = x_0$. Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι x = 1.

22059.α) Αν το Α ήταν σημείο της ευθείας θα ήταν $4\cdot 1+6\cdot(-3)=1 \Leftrightarrow 4-18=1$ αδύνατο, άρα το Α δεν είναι σημείο της ευθείας.

β) Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$. Έστω (η) η ζητούμενη ευθεία.

Είναι η//ε $\Leftrightarrow \lambda_{\eta} = \lambda_{\varepsilon} = -\frac{2}{3}$, οπότε η (η) έχει εξίσωση:

$y+3 = -\frac{2}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$.

22072.α) Η (1) δεν είναι ευθεία όταν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η (2) δεν είναι ευθεία όταν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$\begin{cases} 3\lambda + 1 = 0 \\ 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \lambda = 0 \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $\vec{\delta}_1 = (\lambda - 1, -\lambda)$ ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία (1) και

$\vec{\delta}_2 = (-2\lambda, -3\lambda - 1)$ ένα παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία (2).

Οι ευθείες (1), (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ είναι κάθετα, οπότε

$\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(-2\lambda) - \lambda(-3\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -3$.

22171. α) Για να βρούμε το σημείο τομής λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων τους.

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y-1) - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 3 - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2y = 8 \\ x = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 - 1 = 3 \end{cases}$, άρα Μ(3,4).

β) Η ευθεία (ε_2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -\frac{1}{-1} = 1$.

Αν ε η ζητούμενη ευθεία τότε $\lambda_{\varepsilon}\lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -1$.

Η ε έχει εξίσωση: $y-4=-1(x-3) \Leftrightarrow y=-x+7$.

γ) Ένα διάνυσμα παράλληλο στην ($ε_1$) είναι το $\vec{\delta}=(-1,-3)$.

4ο Θέμα

15004.α) $\lambda_{AB}=\frac{5-2}{8-4}=\frac{3}{4}$ και AB: $y-2=\frac{3}{4}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x-1$.

β) Το διάνυσμα $\vec{\delta_1}=(-4,-3)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το διάνυσμα $\vec{\delta_2}=(-1,-7)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2.

Είναι $συν\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{-4\cdot(-1)+(-3)\cdot(-7)}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}}=\frac{25}{5\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

, άρα η οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 45°.

15253.α) Η (1) δεν παριστάνει ευθεία όταν

$$\begin{cases}\mu^2-1=0\\ 3\mu^2-2\mu-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu=\pm 1\\ \mu=1 \text{ ή } \mu=-\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \mu=1.$$

Άρα για $\mu\neq 1$ η (1) παριστάνει ευθεία.

β) i. Για να είναι η (1) παράλληλη στον xx ′ πρέπει Α =0 ⇔ μ = 1 ή μ= -1. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ = -1.

ii. Για να είναι παράλληλη στον y΄y πρέπει Β =0 ⇔ μ = 1 ή $\mu=-\frac{1}{3}$.Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu=-\frac{1}{3}$.

iii. Για να διέρχεται από το (0,0) πρέπει

$\Gamma=0 \Leftrightarrow -5\mu^2+4\mu+1=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=-\frac{1}{5}$. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu=-\frac{1}{5}$.

γ) Για μ = -1 η (1) γίνεται $\varepsilon_1: 4y-8=0 \Leftrightarrow y=2$. Για μ = 0 η (1) γίνεται $\varepsilon_2: -x-y+1=0$.

Από το σύστημα των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουμε:

$$\begin{cases}y=2\\ -x-y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ -x-2+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ x=-1\end{cases}.$$

Δύο από τις ευθείες της (1) τέμνονται στο σημείο $M(1,2)$, για να διέρχονται όλες οι ευθείες της (1) από το M πρέπει:

$$\left(\mu^2-1\right)(-1)+\left(3\mu^2-2\mu-1\right)\cdot 2-5\mu^2+4\mu+1=0 \Leftrightarrow$$

$$-\mu^2+1+6\mu^2-\cancel{4\mu}-2-5\mu^2+\cancel{4\mu}+1=0 \text{ που ισχύει.}$$

Άρα όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο M(-1,2).

15475.α) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{3-1}{4-2}=1$ και εξίσωση $y-1=x-2 \Leftrightarrow y=x-1$.

β) Επειδή το σημείο $N(x,y)$ στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα πρέπει να ισαπέχει από τα Α και Β, ισχύει ότι

$$(NA)=(NB)\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-6y+9\Leftrightarrow$$

$$8x-4x=-6y+2y+25-5\Leftrightarrow 4x=20-4y\Leftrightarrow x=5-y\ (1)$$

Επειδή όμως το N ανήκει και στην ευθεία ε, οι συντεταγμένες του Κ είναι η λύση του συστήματος της (1) με την ε. Είναι

$$\begin{cases}x=5-y\\ y=2x-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-y\\ y=2(5-y)-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-y\\ y=10-2y-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5-y\\ 3y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$$

, άρα N(4,1).

γ) Είναι $(NA)=(NB)=\sqrt{(4-2)^2+(1-1)^2}=2$.

15439.α) i. Βρίσκουμε την προβολή Π του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε) : Είναι $\lambda_\varepsilon=-1$ και $\varepsilon\perp A\Pi \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\lambda_{A\Pi}=-1\Leftrightarrow \lambda_{A\Pi}=1$, οπότε η ΑΠ έχει εξίσωση $y-3=1\cdot(x-2)\Leftrightarrow y=x+1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου Ρ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases}y=x+1\\ x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ x+x+1+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+1\\ 2x=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1+1=0\\ x=-1\end{cases}$$

, άρα Π(- 1, 0).

ii. Το Π είναι το μέσο του ΑΑ΄, οπότε

$$x_\Pi=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\Leftrightarrow -1=\frac{2+x_{A'}}{2}\Leftrightarrow -2=2+x_{A'}\Leftrightarrow x_{A'}=-4 \text{ και}$$

$y_{\Pi}=\dfrac{y_{A}+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow 0=\dfrac{3+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow 0=3+y_{A'}\Leftrightarrow y_{A'}=-3$, άρα $A'(-4,-3)$.

β) i. Είναι $\lambda_2=\dfrac{1+3}{1+4}=\dfrac{4}{5}$ και η εξίσωση της (ε_2) είναι

$y-1=\dfrac{4}{5}(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$.

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ, δηλαδή του σημείου πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας πάνω στην ευθεία (ε), προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των ευθειών (ε) και (ε_2):

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}+1=0 \\ y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4x+1+5=0 \\ y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5} \end{cases}\Leftrightarrow$$

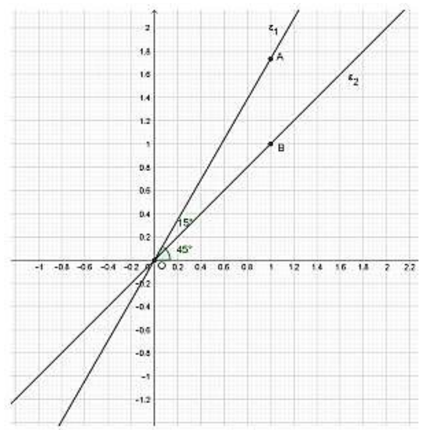
$$\begin{cases} 9x=-6 \\ y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{4}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ άρα } \Sigma\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right).$$

γ) Βρίσκουμε την προσπίπτουσα ακτίνα (ε_1), δηλαδή την ΑΣ:

Είναι $\lambda_{A\Sigma}\dfrac{3+\frac{1}{3}}{2+\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{3}}=\dfrac{5}{4}$ και η εξίσωσή της είναι:

$y-3=\dfrac{5}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

18244.α) Η ευθεία ε_1 για x = 1 δίνει $y=\sqrt{3}$, άρα το $A\left(1,\sqrt{3}\right)$ είναι σημείο της ε_1, οπότε αυτή διέρχεται από τα Ο και Α.



Η ευθεία ε_2 για x = 1 δίνει $y=1$, άρα το $B\left(1,1\right)$ είναι σημείο της ε_2, οπότε αυτή διέρχεται από τα Ο και Β.

β) Έστω ω_1 η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον άξονα x΄x, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1=\lambda_1=\sqrt{3}\Leftrightarrow\omega_1=60^\circ$.

Έστω ω_2 η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα x΄x, τότε $\varepsilon\varphi\omega_2=\lambda_2=1\Leftrightarrow\omega_1=45^\circ$.

γ) Από το σχήμα προκύπτει ότι η γωνία των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι ίση με $\omega_1-\omega_2=15^\circ$.

δ) Έστω $\vec{\delta}_1//\varepsilon_1$, τότε $\vec{\delta}_1=\left(1,\sqrt{3}\right)$ και $\vec{\delta}_2//\varepsilon_2$, τότε $\vec{\delta}_2=\left(1,1\right)$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\dfrac{1\cdot1+\sqrt{3}\cdot1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ άρα $\sigma\upsilon\nu15^\circ=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

16477.α) i. Για λ = 0 είναι ε_0: $y+2=0\Leftrightarrow y=-2$ και για λ = 1 είναι ε_1: $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

Δύο από τις ευθείες ε_λ, οι $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ τέμνονται στο σημείο $\left(-2,-2\right)$. Για να είναι αυτές οι συντεταγμένες του φάρου Φ πρέπει:

$\lambda\left(-2\right)+\left(1-\lambda\right)\left(-2\right)+2=0\Leftrightarrow-2\lambda-2+2\lambda+2=0$ ισχύει.

Άρα $\Phi\left(-2,-2\right)$.

ii. Για να υπάρχει φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το Ο πρέπει

$\lambda\cdot0+\left(1-\lambda\right)\cdot0+2=0\Leftrightarrow2=0$ αδύνατο.

Οπότε δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Έστω ότι το Ρ έχει συντεταγμένες $\left(x_1,y_1\right)$. Επειδή το Ρ βρίσκεται στην ευθεία $x+y+4=0$, ισχύει ότι: $x_1+y_1+4=0\Leftrightarrow y_1=-4-x_1$

Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα PO με μήκος 4 μονάδες, άρα

$$\left(\text{PO}\right)=4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(0-x_1\right)^2+\left(0-y_1\right)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+y_1^2=16 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

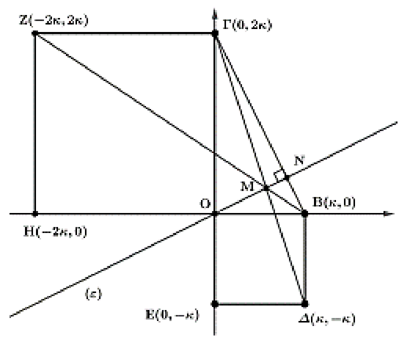
$$x_1^2+\left(-4-x_1\right)^2=16 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2+x_1^2+8x_1+16=16 \Leftrightarrow 2x_1^2+8x_1=0 \Leftrightarrow 2x_1\left(x_1+4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$x_1=0 \text{ ή } x_1=-4$$

Για $x_1=0$ είναι $y_1=-4$ και για $x_1=-4$ είναι $y_1=0$

Επειδή το P βρίσκεται βορειότερα του φάρου Φ είναι $y_1>-2$, άρα το ρυμουλκό πλοίο έχει συντεταγμένες $P\left(-4,0\right)$.



21160.α) Επειδή τα τετράπλευρα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: Δ(κ,- κ), Ε(0,- κ), Ζ(-2κ, 2κ) και Η(- 2κ,0)

Η ευθεία ΓΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{-\kappa-2\kappa}{\kappa-0}=-3$ και εξίσωση $y-2\kappa=3x \Leftrightarrow y=3x+2\kappa$.

Η ευθεία ΒΖ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{BZ}=\dfrac{2\kappa-0}{-2\kappa-\kappa}=-\dfrac{2}{3}$ και εξίσωση

$$y-0=-\frac{2}{3}\left(x-\kappa\right) \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\kappa.$$

β) Έστω ΟΝ ύψος του τριγώνου ΟΒΓ.

Είναι $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{2\kappa-0}{0-\kappa}=-2$ και $ON \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{ON}\lambda_{B\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{ON}=\dfrac{1}{2}$

Το ύψος ΟΝ διέρχεται από την αρχή των αξόνων , οπότε έχει εξίσωση $y=\dfrac{1}{2}x$.

γ) Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο Μ του οποίου οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις των ευθειών. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή δύο ευθειών από τις τρεις ανήκει στην τρίτη ευθεία. Οι συντεταγμένες της τομής Μ των ευθειών (ε) και ΓΔ δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\kappa \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\kappa \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-4x+4\kappa \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x=4\kappa \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4\kappa}{7} \\ y=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\kappa}{7}=\frac{2\kappa}{7} \end{cases}, \text{ άρα } M\left(\frac{4\kappa}{7},\frac{2\kappa}{7}\right).$$

Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ αφού οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν, οπότε

$\frac{2\kappa}{7}=-\frac{2}{3}\left(\frac{4\kappa}{7}\right)+\frac{2\kappa}{3}\Leftrightarrow\frac{2\kappa}{7}=-\frac{8\kappa}{21}+\frac{2\kappa}{3}\Leftrightarrow 6\kappa=-8\kappa+14\kappa$ ισχύει.

21652.α) Η εξίσωση $\lambda x+y=2\lambda\Leftrightarrow\lambda x+y-2\lambda=0$ είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $B=1\neq0$, οπότε παριστάνει ευθεία ε_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

Η εξίσωση $x+\lambda y=\lambda+1\Leftrightarrow x+\lambda y-(\lambda+1)=0$ είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A=1\neq0$, οπότε παριστάνει ευθεία η_λ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Οι ευθείες τέμνονται όταν το σύστημά τους έχει μοναδική λύση. Είναι $\lambda x+y=2\lambda\Leftrightarrow y=2\lambda-\lambda x$ (1), οπότε:

$x+\lambda y=\lambda+1\Leftrightarrow x+\lambda(2\lambda-\lambda x)=\lambda+1\Leftrightarrow x+2\lambda^2-\lambda^2x=\lambda+1\Leftrightarrow$

$(1-\lambda^2)x=-2\lambda^2+\lambda+1$.

Η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν $1-\lambda^2\neq0\Leftrightarrow\lambda^2\neq1\Leftrightarrow\lambda\neq\pm1$.

γ) i. Για $\lambda\neq\pm1$ είναι $x=\frac{-2\lambda^2+\lambda+1}{1-\lambda^2}=\frac{-\cancel{(\lambda-1)}(2\lambda+1)}{-\cancel{(\lambda-1)}(\lambda+1)}=\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}$. Τότε η (1) γίνεται $y=2\lambda-\lambda\cdot\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}=\frac{\lambda}{\lambda+1}$, οπότε το σημείο τομής των ευθειών είναι το $M\left(\frac{2\lambda+1}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$, $\lambda\neq\pm1$.

ii. Το Μ κινείται στην ευθεία ζ, αν και μόνο αν για κάθε $\lambda\neq\pm1$ είναι:

$\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}-\frac{\lambda}{\lambda+1}=1\Leftrightarrow\frac{2\lambda+1-\lambda}{\lambda+1}=1\Leftrightarrow\frac{\lambda+1}{\lambda+1}=1$ ισχύει.

Εμβαδόν τριγώνου – Απόσταση σημείου από ευθεία

2ο Θέμα

15440.α) $\overrightarrow{AB}=\left(3-0,0-2\right)=\left(3,-2\right)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\left(1-0,1-2\right)=\left(1,-1\right)$.

β) i. $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$, οπότε τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα και τα σημεία Α, Β, Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. $\left(AB\Gamma\right)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\dfrac{1}{2}$ τ.μ.

16194.α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των δύο ευθειών και παίρνουμε $9x=27\Leftrightarrow x=3$.
Αντικαθιστούμε στην χ – ψ = -1 το χ =3 και παίρνουμε ψ = 4, άρα Μ(3,4).

β) i. Είναι $\overrightarrow{OM}=\left(3-0,4-0\right)=\left(3,4\right)$ και $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

ii. $d\left(M,\varepsilon_3\right)=\dfrac{\left|3\cdot 3+4\cdot 4+5\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{30}{5}=6$.

16425.α) Είναι $\varepsilon_1: y=\dfrac{2}{3}x+1$ με $\lambda_1=\dfrac{2}{3}$ και

και $\varepsilon_2: x=\dfrac{3}{2}y+9\Leftrightarrow x-9=\dfrac{3}{2}y\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x-6\Leftrightarrow -2x+3y+18=0$ με

$\lambda_2=\dfrac{2}{3}$. Είναι $\lambda_1=\lambda_2\Leftrightarrow \varepsilon_1//\varepsilon_2$.

β) Στην ε_1 για x = 0 παίρνουμε $y=1$, οπότε το σημείο Μ(0,1) ανήκει στην ε_1.

Είναι $d\left(\varepsilon_1,\varepsilon_2\right)=d\left(M,\varepsilon_2\right)=\dfrac{\left|-2\cdot 0+3\cdot 1+18\right|}{\sqrt{\left(-2\right)^2+3^2}}=\dfrac{21}{\sqrt{13}}=\dfrac{21\sqrt{13}}{13}$.

16759.α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση x − 2y + 1 = 0 και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.

Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση 2x + y − 4 = 0 και συντελεστή διεύθυνσης .

$\lambda_2=-\dfrac{2}{1}=-2$

Είναι $\lambda_1\lambda_2=-1$ Άρα, οι ευθείες (ε_1) και (ε2) είναι κάθετες.
β) Για το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2), λύνουμε αρχικά την εξίσωση x − 2y + 1 = 0 ως προς x, οπότε: x = 2y − 1 .
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 2x + y − 4 = 0 και έχουμε διαδοχικά:

$2(2y-1)+y-4=0 \Leftrightarrow 4y-2+y-4=0 \Leftrightarrow 5y=6 \Leftrightarrow y=\frac{6}{5}$ και

$x=2\cdot\frac{6}{5}-1=\frac{7}{5}$, άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το $A\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$.

γ) Η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε3) με εξίσωση y + 1 = 0

είναι: $d(A,\varepsilon_1)=\dfrac{\left|0\cdot\frac{7}{5}+\frac{6}{5}+1\right|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{11}{5}$.

16769.α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(-1-1,5-7)=(-2,-2)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma}=(3-1,3-7)=(2,-4)$.

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -4\end{vmatrix}=8+4=12$, άρα $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=6$.

β) i. Είναι $x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=\dfrac{-1+3}{2}=1$, $y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=\dfrac{5+3}{2}=4$, άρα M(1,4).

ii. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία Α και Μ είναι $x_M = x_A = 1$.
Επομένως, η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας), οπότε έχει εξίσωση x = 1.

16771.α) Είναι

$\overrightarrow{AB}=(x_B-2,y_B-1)=(3,-1)\Leftrightarrow(x_B-2=3\Leftrightarrow x_B=5)$ και

$(y_B-1=-1\Leftrightarrow y_B=0)$, άρα Β(5,0).

β) i. Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}=(4-2,-1-1)=(2,-2)$, $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$.

Επειδή $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-6+2=-4\neq 0$ τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$

δεν είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Α ,Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}, \overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)\right| = 2$$

16774.α) $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \dfrac{-2-6}{-1-3} = 2$.

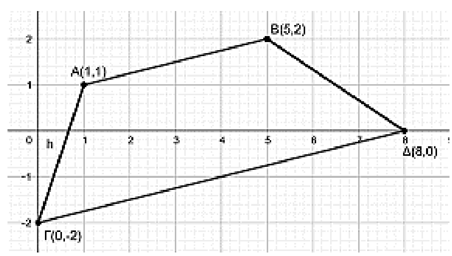
β) Έστω ΑΚ το ύψος από το Α. Τότε ΑΚ $\perp$ ΒΓ , οπότε

$$\lambda_{\text{ΑΚ}}\lambda_{\text{ΒΓ}} = -1 \Leftrightarrow 2\lambda_{\text{ΑΚ}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{ΑΚ}} = -\frac{1}{2}.$$

Η εξίσωση της ευθείας ΑΚ θα είναι: $y - 5 = -\dfrac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

γ) Είναι $\lambda_{\text{ΑΒ}} = \dfrac{6-5}{3-2} = 1$ και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ΑΒ με τον x΄x, δηλαδή: $\text{εφ}\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{\pi}{4}$.

16810.α) Τοποθετούμε τα σημεία στο επίπεδο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ τραπέζιο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται.



Είναι $\lambda_{\text{ΑΒ}} = \dfrac{2-1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$ και $\lambda_{\text{ΓΔ}} = \dfrac{0+2}{8-0} = \dfrac{1}{4}$, άρα ΑΒ // ΓΔ.

$\lambda_{\text{ΑΓ}} = \dfrac{-2-1}{0-1} = 3$ και $\lambda_{\text{ΒΔ}} = \dfrac{0-2}{8-1} = -\dfrac{2}{7}$, άρα $\lambda_{\text{ΑΓ}} \neq \lambda_{\text{ΒΔ}} \Leftrightarrow \text{ΑΓ} \nparallel \text{ΒΔ}$.

β) Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ έχουμε: (ΑΒΔΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΓΔ) (1).

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}, \overrightarrow{\text{ΑΔ}}$ και έχουμε:

$\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = (0-1, -2-1) = (-1,-3)$, $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = (8-1, 0-1) = (7,-1)$,

$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = (5-1, 2-1) = (4,1)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=1+21=22$, άρα

$\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=11$ και

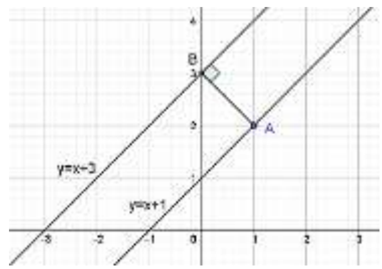
$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-11$, άρα $\left(\mathrm{AB\Delta}\right)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\dfrac{11}{2}$.

Είναι $\left(\mathrm{AB\Delta\Gamma}\right)=\dfrac{11}{2}+11=\dfrac{33}{2}$.

18240.α) (ε): $\mathrm{y}=\mathrm{x}+3\Leftrightarrow \mathrm{x}-\mathrm{y}+3=0$

$\mathrm{d}\left(\mathrm{A},\varepsilon\right)=\dfrac{\left|1-2+3\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}}\Leftrightarrow$

$\mathrm{d}\left(\mathrm{A},\varepsilon\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.



β) Είναι $\eta//\varepsilon\Leftrightarrow\lambda_\eta=\lambda_\varepsilon=1$ και αφού η (η) διέρχεται από το Α(1, 2) θα έχει εξίσωση $\mathrm{y}-2=\mathrm{x}-1\Leftrightarrow \mathrm{y}=\mathrm{x}+1$.

γ) Οι ευθείες (ε), (η) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

17805.α) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(3,4\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\dfrac{12}{5}-3,\dfrac{16}{5}-4\right)=\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$.

β) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\dfrac{12}{5}-3,\dfrac{16}{5}-4\right)=\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{1}{5}\left(3,4\right)=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

γ) Είναι $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\begin{vmatrix}-\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ 4 & -3\end{vmatrix}=\dfrac{9}{5}+\dfrac{16}{5}=\dfrac{25}{5}=5$, άρα

$\left(\mathrm{A\Delta B}\right)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 5=\dfrac{5}{2}$ τ.μ..

Είναι $\dfrac{1}{5}\left(\mathrm{OAB}\right)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{25}{2}=\dfrac{5}{2}=\left(\mathrm{A\Delta B}\right)$.

18733.α) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(1-4,1-3\right)=\left(-3,-2\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(6-4,0-3\right)=\left(2,-3\right)$.

β) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=-3\cdot 2+\left(-2\right)\cdot\left(-3\right)=-6+6=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

γ) Είναι $(\mathrm{MA})=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2+\left(\frac{1}{2}-3\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}\Leftrightarrow$

$(\mathrm{MA})=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,

$(\mathrm{MB})=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,

άρα (ΜΑ) = (ΜΒ).

18979.α) Είναι $\lambda_1=-\frac{2}{3}$ και $\lambda_2=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$. Επειδή $\lambda_1=\lambda_2$, είναι $\varepsilon_1//\varepsilon_2$.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α(1,1) επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_1, αφού 2 · 1 + 3 · 1 = 5. Άρα το σημείο Α ανήκει στην ευθεία ε_1.

γ) Είναι $d(\mathrm{A},\varepsilon_2)=\frac{|4\cdot 1+6\cdot 1-8|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{2}{\sqrt{52}}=\frac{2}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$.

20885.α) Εφόσον η ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{3\pi}{4}$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}=\varepsilon\varphi\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ και εξίσωση

$y+1=-(x+3)\Leftrightarrow y=-x-4$.

β) Από την εξίσωση της ευθείας ε για x = 0, το y = - 4. Επίσης για y = 0, το x = - 4 .

Άρα η ε τέμνει τον άξονα x΄ x στο σημείο Κ(- 4, 0) και τον y΄ y στο Λ(0, - 4).

Είναι $(\mathrm{OK\Lambda})=\frac{1}{2}(\mathrm{OK})(\mathrm{O\Lambda})=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$.

20864.α) Οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{2}{1}=-2$, οπότε είναι παράλληλες.

β) i. Το Α ανήκει στην ε_1 όταν $2\cdot 0+6-6=0$ που ισχύει.

ii. Είναι $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(\mathrm{A},\varepsilon_2)=\frac{|2\cdot 0+6+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

20926.α) Το Β ανήκει στην ε όταν $1-2\cdot 0=1$ που ισχύει
Αν το Α ανήκε στην ε τότε $0-2\cdot 2=1$ άτοπο, άρα το Α δεν ανήκει στην ε.

β) $d(A,\varepsilon)=\dfrac{|0-2\cdot 2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

γ) Είναι $(AB)=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=5=d(A,\varepsilon)$, οπότε η προβολή του Α στην ευθεία ε είναι το Β.

21260.α) Το Α ανήκει στην ευθεία, αν και μόνο αν
$10-2\cdot 5=0\Leftrightarrow 10-10=0$ ισχύει.

β) $\overrightarrow{AB}=(1-5,1-10)=(-4,-9)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-1-5,3-10)=(-6,-7)$.

γ) $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-4 & -9\\ -6 & -7\end{vmatrix}=28-54=-26$,

$(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\dfrac{26}{2}=13$.

4ο Θέμα

14984.α) Έστω Μ(x,y). Είναι
$\overrightarrow{AM}=(x+2,y+3)$, $\overrightarrow{AB}=(7+2,9+3)=(9,12)$ και

$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}x+2 & y+3\\ 9 & 12\end{vmatrix}=12x+24-9y-27=12x-9y-3$.

$(AMB)=12\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right|=12\Leftrightarrow |12x-9y-3|=24\Leftrightarrow$
$12x-9y-3=\pm 24\Leftrightarrow$
$(12x-9y-3=24\Leftrightarrow 12x-9y-27=0\Leftrightarrow 4x-3y-9=0)$ ή
$(12x-9y-3=-24\Leftrightarrow 12x-9y+21=0\Leftrightarrow 4x-3y+7=0)$ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2). Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{4}{3}$.

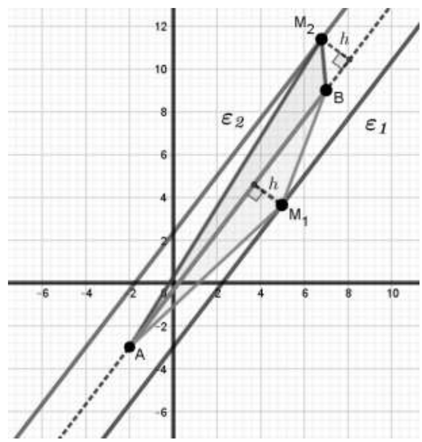
β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB}=\dfrac{9+3}{7+2}=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$, δηλαδή η AB είναι παράλληλη στις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$. Για να είναι η AB μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ αρκεί ένα οποιοδήποτε σημείο της να ισαπέχει από τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

Είναι $d(A,\varepsilon_1)=\dfrac{|4\cdot(-2)-3\cdot(-3)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{8}{5}$ και

$d(A,\varepsilon_2)=\dfrac{|4\cdot(-2)-3\cdot(-3)+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{8}{5}$, οπότε επειδή

$d(A,\varepsilon_1)=d(A,\varepsilon_2)$ η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

γ) Με βάση το διπλανό σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα AB, τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου AMB που αντιστοιχεί στην AB είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, οπότε



$(AM_1B)=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot\dfrac{8}{5}=12$

γιατί

$(AB)=\sqrt{(7+2)^2+(9+3)^2}=\sqrt{225}=15$.

Ανάλογα, $(AM_2B)=12$, έτσι $(AM_1BM_2)=24$.

Ώστε (ΑΧΒΥ) = 24 για οποιαδήποτε σημεία Χ,Υ των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία M_1, B, M_2 συνευθειακά).

Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα ΑΧΒΥ με σταθερό εμβαδόν 24.

15194.α) Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{1-4}{3-4}=\dfrac{-3}{-1}=3$. Αφού $\lambda_{AB}\neq\lambda_{B\Gamma}$ τότε δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσο Μ της ΒΓ έχουμε $x_M = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$ και $y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$, άρα $M\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Αν (ε) είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ τότε ισχύει

$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow 3\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{3}$.

Άρα έχουμε $(\varepsilon): y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

γ) Αφού το σημείο Κ είναι σημείο της (ε) τότε $K\left(x, -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}\right)$.

Είναι $(KA) = (KB) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 - (x-4)^2 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 3(2x-5) = 3\left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$2x - 5 = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \Leftrightarrow 6x - 15 = 2x - 7 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Άρα $K\left(2, -\frac{1}{3}2 + \frac{11}{3}\right) \equiv K(2,3)$.

Το Κ ως σημείο της μεσοκαθέτου (ε) του ΒΓ ισαπέχει από τα άκρα του Β και Γ.

Άρα τελικά είναι (ΚΑ)=(ΚΒ)=(ΚΓ) και τα Α,Β,Γ είναι κορυφές τριγώνου που ισαπέχουν από το Κ. Επομένως το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή το περίκεντρο.

15273.α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2-3, 5-4) = (-1, 1)$ $\overrightarrow{B\Gamma} = (-2-2, 2-5) = (-4, -3)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$, οπότε τα διανύσματα

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ δεν είναι συνευθειακά, άρα τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{ΒΓ} = \lambda_{\overrightarrow{ΒΓ}} = \frac{3}{4}$ και εξίσωση:

$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$.

γ) Είναι $\begin{cases} x_M = 4\alpha - 1 \\ y_M = 3\alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 12\alpha - 3 \\ -4y_M = -12\alpha - 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 3x_M - 4y_M = -7$.

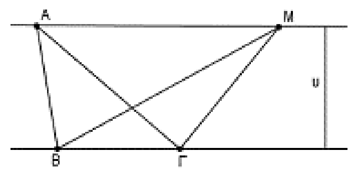
Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση

$3x - 4y = -7 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$, οπότε τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία ε:

$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$. Είναι $\lambda_\varepsilon = \lambda_{ΒΓ} = \frac{3}{4}$, οπότε ε//ΒΓ.

Ακόμη $3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = -7 \Leftrightarrow 9 - 16 = -7$ ισχύει, δηλαδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την ε, οπότε η ευθεία ε διέρχεται από το Α.

δ) Είναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{ΑΒ}, \overrightarrow{ΒΓ}\right)\right| = \frac{7}{2}$.



Είναι $\overrightarrow{ΒΜ} = (4\alpha - 3, 3\alpha - 4)$ και

$\det\left(\overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΒΜ}\right) = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4\alpha - 3 & 3\alpha - 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

$\det\left(\overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΒΜ}\right) = -12\alpha + 16 + 12\alpha - 9 = 7$, άρα

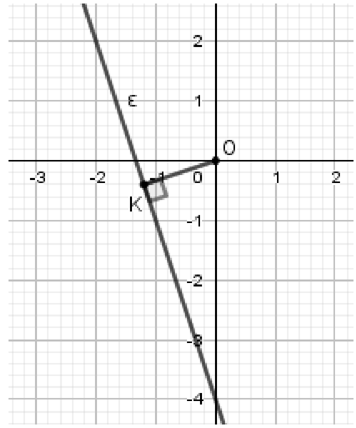
$(ΒΓΜ) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΒΜ}\right)\right| = \frac{7}{2}$, οπότε $(ΑΒΓ) = (ΒΓΜ)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.

15380.α) Είναι $(ΑΒ) = d(Α, \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + \alpha|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|\alpha + 6|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10 \Leftrightarrow$

$\alpha + 6 = \pm 10 \Leftrightarrow (\alpha + 6 = 10 \Leftrightarrow \alpha = 4)$ ή $(\alpha + 6 = -10 \Leftrightarrow \alpha = -16)$.



β) i. Για α = 4 είναι ε: $3x+y+4=0$.
Για x = 0 είναι $y+4=0 \Leftrightarrow y=-4$ άρα $\Gamma(0,-4)$.
Είναι $\overrightarrow{AB}=(-2-1,2-3)=(-3,-1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(0-1,-4-3)=(-1,-7)$.
Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}=21-1=20$
και $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot 20=10$ τ.μ.

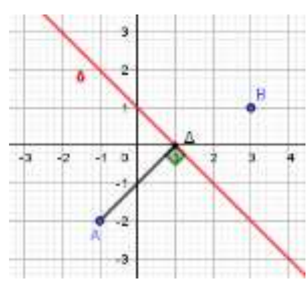
γ) Έστω K η προβολή της αρχής O των αξόνων στην ευθεία ε. Το ζητούμενο σημείο είναι το K το οποίο είναι το σημείο τομής της ε με την ευθεία OK.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{1}=-3$ και

$OK\perp\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK}\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow -3\lambda_{OK}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{OK}=\frac{1}{3}$, άρα η OK έχει εξίσωση

$y=\frac{1}{3}x$. Είναι $\begin{cases} y=\frac{1}{3}x\\ 3x+y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}x\\ 3x+\frac{1}{3}x+4=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x\\ \frac{10}{3}x=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=-\frac{2}{5}\\ x=-\frac{6}{5}\end{cases}$, άρα $K\left(-\frac{6}{5},-\frac{2}{5}\right)$.



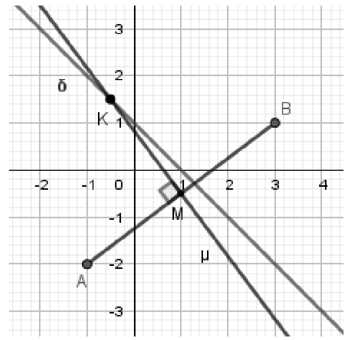
15433.α) i. Γνωρίζουμε το κάθετο τμήμα από σημείο προς ευθεία έχει μικρότερο μήκος από οποιοδήποτε πλάγιο τμήμα, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο Δ που είναι η προβολή του Α στη δ.
Είναι $\lambda_\delta=-\frac{1}{1}=-1$, οπότε $\lambda_{A\Delta}\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta}=1$.
Η ΑΔ έχει εξίσωση: $y+2=1(x+1) \Leftrightarrow y=x-1$

Οι συντεταγμένες του Δ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x-1-1=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1-1=0 \end{cases}, \text{ άρα}$$

Δ(1,0).

ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας ψάχνουμε το σημείο της ευθεία δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Κ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο μ του ΑΒ.



Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 1$ και $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -\dfrac{1}{2}$,

δηλαδή $M\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{1+2}{3+1} = \dfrac{3}{4}$ και $\mu \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{AB}\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\lambda_\mu = -1 \Leftrightarrow$

$\lambda_\mu = -\dfrac{4}{3}$.

Η μεσοκάθετη μ έχει εξίσωση:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{6}.$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου υγείας Κ είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{6}-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-8x+5-6=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=1 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ Άρα } K\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

β) Έστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε επειδή είναι σημείο της ευθείας δ, ισχύει ότι $x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(4,3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(x+1,y+2)=(x+1,1-x+2)=(x+1,3-x)$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x+1 & 3-x \end{vmatrix} = 12-4x-3x-3=9-7x.$$

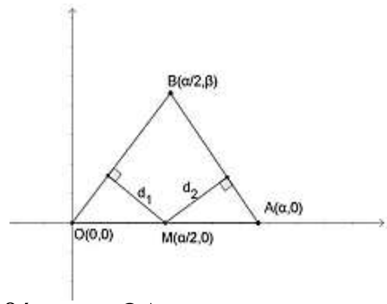
$$(AB\Gamma)=8 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=8 \Leftrightarrow |9-7x|=16 \Leftrightarrow 9-7x=\pm16 \Leftrightarrow$$

$$\left(9-7x=16 \Leftrightarrow 9-16=7x \Leftrightarrow -7=7x \Leftrightarrow x=-1\right) \text{ ή}$$

$$\left(9-7x=-16 \Leftrightarrow 25=7x \Leftrightarrow x=\frac{25}{7}\right).$$

Αν $x=-1$ τότε $\Gamma(-1,2)$ και αν $x=\frac{25}{7}$, τότε $\Gamma\left(\frac{25}{7},-\frac{18}{7}\right)$.

15681.α) Είναι



$$(OB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}$$

και

$$(BA)=\sqrt{\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2},$$

άρα (OB)=(BA)

οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΟΑ.

β) Η ευθεία ΟΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{OB}=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-0}=\dfrac{2\beta}{\alpha}$ και

εξίσωση $y=\dfrac{2\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$.

Η ευθεία ΟΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{\beta-0}{\frac{\alpha}{2}-\alpha}=-\dfrac{2\beta}{\alpha}$ και

εξίσωση $y=-\dfrac{2\beta}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$.

γ) Είναι $d_1=d(M,OB)=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+(-\alpha)^2}}=\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ και

$d_2=d(M,AB)=\dfrac{\left|2\beta\frac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$, άρα $d_1=d_2$.

δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.

15692.α) i. $x^2+y^2+y=x+2xy+6 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-x+y-6=0 \Leftrightarrow$
$(x-y)^2-(x-y)-6=0$.
ii. Έστω $x-y=\omega$, τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται
$\omega^2-\omega-6=0 \Leftrightarrow \omega=3$ ή $\omega=2$, άρα
$x-y=3 \Leftrightarrow x-y-3=0$ ή $x-y=-2 \Leftrightarrow x-y+2=0$. Επομένως η εξίσωση παριστάνει τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: x-y-3=0$ και
$\varepsilon_2: x-y+2=0$ ($\lambda_1=\lambda_2=1$).

β) Είναι $d(M,\varepsilon_1)=\dfrac{\left|\alpha-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$ και

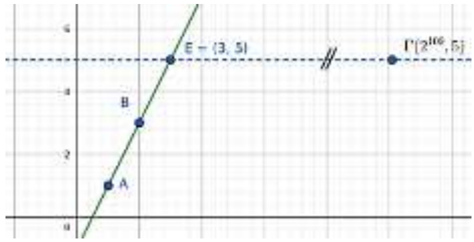
$$d(M,\varepsilon_2)=\frac{\left|\alpha-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}\text{, άρα}$$

$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)$.

γ) Επειδή κάθε σημείο της μεσοπαράλληλης ισαπέχει από τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, τα σημεία Μ βρίσκονται στη μεσοπαράλληλη.
Είναι $x_M=\alpha,\ y_M=\alpha-\frac{1}{2}=x_M-\frac{1}{2}$. Επειδή τα σημεία Μ επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-\frac{1}{2}$, η μεσοπαράλληλη έχει εξίσωση $y=x-\frac{1}{2}$.

15987.α) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{3-1}{2-1}=2$ και εξίσωση $y-1=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-1$.
β) Το σημείο Ε(3,5) ανήκει στην (ε), διότι 2·3−1=5.
Το σημείο Γ βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x την y=5 με το Ε και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο Ο(0,0) βρίσκεται στο

άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε). Η απόσταση του Ο και του Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$ και

$$d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$$. Επειδή d (O ,ε)<d(Γ, ε), το ύψος του τριγώνου ΟΑΒ με βάση την ΑΒ είναι μικρότερο από το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ με βάση την ΑΒ, οπότε (ΟΒΓ)<(ΑΒΓ).

16057.α) i. Οι ευθείες που έχουν κλίση λ και διέρχονται από το σημείο Α ορίζονται από την εξίσωση: $(\varepsilon_\lambda): y-0=\lambda(x-2)\Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda=0$.

ii. $d(B,\varepsilon_\lambda)=1\Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 3-4-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=1\Leftrightarrow \frac{|\lambda-4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow |\lambda-4|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$

$$(\lambda-4)^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2\Leftrightarrow \lambda^2-8\lambda+16=\lambda^2+1\Leftrightarrow -8\lambda=-15\Leftrightarrow \lambda=\frac{15}{8}.$$

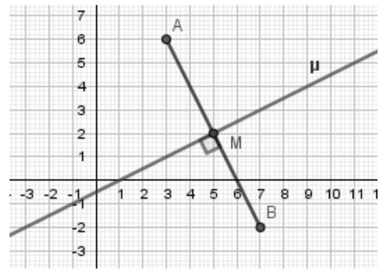
Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση (ε):

$$\frac{15}{8}x-y-2\cdot\frac{15}{8}=0\Leftrightarrow 15x-8y-30=0.$$

β) Από το σημείο Α διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία (ζ), για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, με εξίσωση x = 2. Έτσι, έχουμε: $d(B,\zeta)=\frac{|1\cdot 3-2|}{\sqrt{1}}=1$.

γ) Οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, διότι έχουν κοινό σημείο το Α, αλλά δεν ταυτίζονται αφού $\lambda_\varepsilon=\frac{15}{8}$ και (ζ)//y΄y. Το σημείο Β απέχει ίση απόσταση από τις ευθείες (ε) και (ζ) , επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ευθειών. Επιπλέον ισχύει ότι $\lambda_{AB}=\frac{4-0}{3-2}=4$.

17694.α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε:



$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=5,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$,

άρα Μ(5,2).

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{-2-6}{7-3}=-2$ και

$AB\perp\mu\Leftrightarrow\lambda_{AB}\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow-2\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow\lambda_\mu=\frac{1}{2}$, άρα

μ: $y-2=\frac{1}{2}(x-5)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Έστω ότι το Σ έχει συντεταγμένες (x,y), τότε επειδή βρίσκεται στην ευθεία μ, ισχύει ότι $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$, οπότε $\Sigma\left(x,\frac{x-1}{2}\right)$.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(7-3,-2-6)=(4,-8)$,

$\overrightarrow{A\Sigma}=\left(x-3,\frac{x-1}{2}-6\right)=\left(x-3,\frac{x-13}{2}\right)$ και

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Sigma}\right)=\begin{vmatrix}4 & -8\\ x-3 & \frac{x-13}{2}\end{vmatrix}=2(x-13)+8(x-3)=$

$2x-26+8x-24=10x-50$.

$(\Sigma AB)=20\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Sigma}\right)\right|=20\Leftrightarrow$

$|10x-50|=40\Leftrightarrow 10x-50=\pm40\Leftrightarrow$

$(10x-50=40\Leftrightarrow 10x=90\Leftrightarrow x=9)$ ή

$(10x-50=-40\Leftrightarrow 10x=10\Leftrightarrow x=1)$.

Αν x = 1 τότε Σ(1,0) και αν x = 9 τότε Σ(9,4).

17695.α) Είναι $\begin{cases} x_A = t-1 \\ y_A = 2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x_A + 1 \\ y_A = 2(x_A+1)-1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A+1 \end{cases}$.

Είναι $t \geq 0 \Leftrightarrow x_A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x_A \geq -1$ και $y_A = 2x_A + 1 \geq -2+1 = -1$

Επειδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x+1$ με $x \geq -1$ και $y \geq -1$ το Α κινείται στη ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο $A'(-1,-1)$ και εξίσωση $y = 2x+1$.

Είναι $\begin{cases} x_B = 3t-1 \\ y_B = -4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x_B+1}{3} \\ y_B = -4\dfrac{x_B+1}{3} - 1 = -\dfrac{4x_B+7}{3} \end{cases}$.

Είναι $t \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_B+1}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x_B \geq -1$ και

$y_B = -\dfrac{4x_B+7}{3} \geq -\dfrac{4(-1)+7}{3} = -1$.

Επειδή οι συντεταγμένες του Β επαληθεύουν την εξίσωση $y = -\dfrac{4x+7}{3}$ με $x \geq -1$ και $y \geq -1$ το Β κινείται στη ημιευθεία που έχει αρχή το σημείο $A'(-1,-1)$ και εξίσωση $y = -\dfrac{4x+7}{3}$.

β)Για να υπάρχει χρονική στιγμή $t \geq 0$, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται πρέπει

$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ 6t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$, άρα τη χρονική στιγμή t = 0 τα Α, Β ταυτίζονται.

γ) Για t=2 είναι Α(1, 3) και Β(5, -9) οπότε:

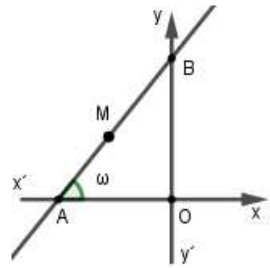
$(AB) = \sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

δ) $d(A,\varepsilon) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4(t-1)+3(2t-1)+7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \dfrac{|4t-4+6t-3+7|}{5} = 6 \Leftrightarrow$

$|10t| = 30 \Leftrightarrow 10t = 30 \Leftrightarrow t = 3$.

20861.α) Αν η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε έχει εξίσωση:
$y-2=\lambda(x+2)\Leftrightarrow y=\lambda x+2\lambda+2$,

ενώ αν δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης θα έχει εξίσωση $x=-2$.



β) i. Η ευθεία $x=-2$ δεν τέμνει τον Oy οπότε απορρίπτεται.

Επειδή η ε τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy, η γωνία ω που σχηματίζει με τον x΄x είναι οξεία, οπότε $\lambda=\varepsilon\varphi\omega>0$.

ii. Για y = 0 η ε γίνεται

$0=\lambda x+2\lambda+2\Leftrightarrow x=-\dfrac{\lambda+2}{\lambda}$, άρα $A\left(-\dfrac{2\lambda+2}{\lambda},0\right)$.

Για x = 0 είναι $y=2\lambda+2$.

$$E=(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=$$

$$\frac{1}{2}\left|-\frac{2\lambda+2}{\lambda}\right||2\lambda+2|\overset{\lambda>0}{=}\frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda+2}{\lambda}\cdot(2\lambda+2)=\frac{2(\lambda+1)^2}{\lambda}.$$

$$E=8\Leftrightarrow\frac{2(\lambda+1)^2}{\lambda}=8\Leftrightarrow(\lambda+1)^2=4\lambda\Leftrightarrow\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=0\Leftrightarrow$$

$\lambda^2-2\lambda+1=0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow\lambda=1$, άρα

ε: $y=x+2+2\Leftrightarrow y=x+4$.

γ) Για λ = 1 είναι $A(-4,0)$, $B(0,4)$ και το ύψος υ με βάση την ΑΒ είναι

$$\upsilon=d(O,\varepsilon_1)=\frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

18732.α) i. Είναι $\overrightarrow{AO}=(0-3,0-4)=(-3,-4)$,

$\overrightarrow{A\Gamma}=\left(2-3,\dfrac{8}{3}-4\right)=\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)$.

Είναι $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{3}(-3,-4)=\left(-1,-\dfrac{4}{3}\right)=\overrightarrow{A\Gamma}$.

Είναι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{13}{3}-3,3-4\right)=\left(\frac{4}{3},-1\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(7-3,1-4)=(4,-3)$,

$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{3}(4,-3)=\left(\frac{4}{3},-1\right)=\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\cdot$

ii. $\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{3-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-2}=\dfrac{\frac{9}{3}-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-\frac{6}{3}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{1}{7}$, $\lambda_{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-0}{7-0}=\frac{1}{7}$. Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta}=\lambda_{\mathrm{OB}}\Leftrightarrow$ $\Gamma\Delta//\mathrm{OB}$.

iii. $(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-1 & -\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|1+\frac{16}{9}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{9}=\frac{25}{18}$,

$(\mathrm{ABO})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-3 & -4\\ 4 & -3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|9+16|=\frac{25}{2}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2(\mathrm{AOB})=\frac{1}{9}\cdot\frac{25}{2}=\frac{25}{18}=(\mathrm{A\Gamma\Delta})$.

β) $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{\nu}(-3,-4)=\left(-\frac{3}{\nu},-\frac{4}{\nu}\right)$,

$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\nu}(4,-3)=\left(\frac{4}{\nu},-\frac{3}{\nu}\right)\cdot$

$$(\mathrm{A\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-\frac{3}{\nu} & -\frac{4}{\nu}\\ \frac{4}{\nu} & -\frac{3}{\nu}\end{matrix}\right\|=\frac{25}{2\nu^2}=\frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{25}{2}=\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\left(\mathrm{ABO}\right).$$

20655.α) i. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-2,-1-1)=(1,-2)$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(-2-2,0-1)=(-4,-1)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-1-8=-9\neq 0\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, οπότε τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά.

ii. $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|=\frac{9}{2}$.

β) Είναι $\overrightarrow{Α\Delta}=\left(x-2,y-1\right)$,

$$\det\left(\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{ΑΓ}\right)=\begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=-x+2+4\left(y-1\right)=$$

$$-x+2+4y-4=-x+4y-2.$$

$$\left(\Delta ΑΓ\right)=\left(ΑΒΓ\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{Α\Delta},\overrightarrow{ΑΓ}\right)\right|=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left|-x+4y-2\right|=9\Leftrightarrow$$

$\left(-x+4y-2=9\Leftrightarrow -x+4y-11=0\right)$ ή

$\left(-x+4y-2=-9\Leftrightarrow -x+4y+7=0\right)$.

Ο γεωμετρικός τόπος του Δ αποτελείται από τα σημεία των παράλληλων ευθειών $\varepsilon_1: x-4y-7=0$ και $\varepsilon_2: x-4y+11=0$.

γ) i. Είναι $\lambda_{\overrightarrow{ΑΓ}}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4},\ \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{4}$, δηλαδή

$$\lambda_{\overrightarrow{ΑΓ}}=\lambda_1=\lambda_2\Leftrightarrow\overrightarrow{ΑΓ}//\varepsilon_1//\varepsilon_2$$

ii. Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση

$$y-1=\frac{1}{4}\left(x-2\right)\Leftrightarrow 4y-4=x-2\Leftrightarrow x-4y+2=0.$$

Ένα σημεία $Μ\left(x_0,y_0\right)$ ανήκει στη μεσοπαράλληλο των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, αν και μόνο αν $d\left(Μ,\varepsilon_1\right)=d\left(Μ,\varepsilon_2\right)\Leftrightarrow\frac{\left|x_0-4y_0-7\right|}{\sqrt{1^2+\left(-4\right)^2}}=\frac{\left|x_0-4y_0+11\right|}{\sqrt{1^2+\left(-4\right)^2}}\Leftrightarrow$

$$\left|x_0-4y_0-7\right|=\left|x_0-4y_0+11\right|\Leftrightarrow$$

$\left(\cancel{x_0}-\cancel{4y_0}-7=\cancel{x_0}-\cancel{4y_0}+11 \text{ αδύνατη}\right)$ ή

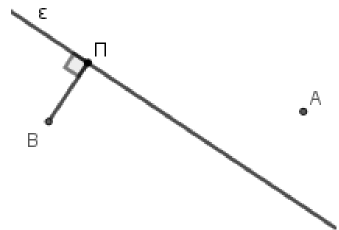
$$\left(x_0-4y_0-7=-x_0+4y_0-11\Leftrightarrow 2x_0-8y_0+4=0\Leftrightarrow x_0-4y_0+2=0\right).$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του Μ ικανοποιούν την εξίσωση της ΑΓ, οπότε η ΑΓ είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

20724.α) Η απόσταση της πόλης Α από την ε είναι $d\left(Α,\varepsilon\right)=\frac{\left|8+1-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$ και η απόσταση της πόλης Β από την ε είναι $d\left(Β,\varepsilon\right)=\frac{\left|-7+4-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

Επειδή $d(B,\varepsilon) < d(A,\varepsilon)$, η πόλη Β είναι πιο κοντά στην ε.

β) Το πλησιέστερο σημείο της ε στη πόλη Β είναι η προβολή Σ του Β στην ε.



Είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{-1}{1} = -1$ και

$B\Sigma \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{B\Sigma}\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Sigma} = 1$.

Η ΒΣ έχει εξίσωση

$y-4 = x+7 \Leftrightarrow y = -x+11$.

$$\begin{cases} y = x+11 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+11 \\ x+x+11-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+11 \\ 2x=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5+11=6 \\ x=-5 \end{cases},$$

άρα $\Pi(-5,6)$

γ) i. Έστω Σ(x, y), τότε επειδή είναι σημείο της ε, ισχύει ότι

$x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$ (1).

Είναι $(A\Sigma) = (B\Sigma) \Leftrightarrow \sqrt{(x-8)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+7)^2+(y-4)^2} \Leftrightarrow$

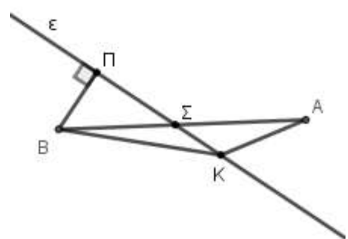
$(x-8)^2+(y-1)^2 = (x+7)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$

$x^2-16x+64+y^2-2y+1 = x^2+14x+49+y^2-8y+16 \Leftrightarrow$

$-30x+6y=0 \Leftrightarrow 6y=30x \Leftrightarrow y=5x \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1-x=5x \Leftrightarrow 6x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$ και

$y = 5\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, άρα $\Sigma\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$.

ii. Έστω ότι η ΑΒ τέμνει την ε στο Σ. ΑΝ θεωρήσουμε οπουδήποτε σημείο Κ της ε διαφορετικό του Σ, τότε από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΑΒ ισχύει ότι



$AB < KA+KB \Leftrightarrow \Sigma A+\Sigma B < KA+KB$,

οπότε το άθροισμα των αποστάσεων του σταθμού από τις πόλεις Α και Β γίνεται ελάχιστο μόνο στη θέση Σ.

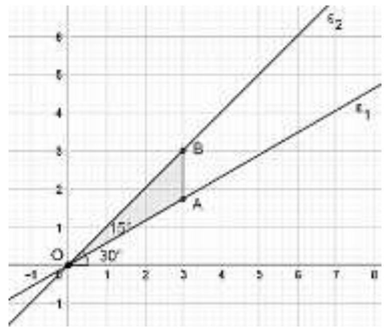
Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-1}{-7-8} = -\frac{1}{5}$ και η ΑΒ έχει εξίσωση:

$y-1 = -\frac{1}{5}(x-8) \Leftrightarrow 5y-5 = -x+8 \Leftrightarrow x+5y-13=0$.

Για τις συντεταγμένες του Σ έχουμε:

$$\begin{cases} x+5y-13=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5-5x-13=0 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x=8 \\ y=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1+2=3 \end{cases},$$

άρα $\Sigma(-2,3)$.



20728.α) Για x = 3 είναι $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3=\sqrt{3}$, οπότε $A(3,\sqrt{3})$ σημείο της ε_1, οπότε η ε_1 είναι η ΟΑ.

Για x = 3 είναι $y=3$, οπότε $B(3,3)$ σημείο της ε_2, οπότε η ε_2 είναι η ΟΒ.

β) Αν ω_1 είναι η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον x΄x, τότε

$$\varepsilon\varphi\omega_1=\lambda_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow \omega_1=30^\circ .$$

Αν ω_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον x΄x, τότε

$$\varepsilon\varphi\omega_2=\lambda_2=1\Leftrightarrow \omega_1=45^\circ .$$

γ) $\overrightarrow{OA}=(3,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{OB}=(3,3)$,

$$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=9-3\sqrt{3}=3\left(3-\sqrt{3}\right).$$

$$(OAB)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot 3\left(3-\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}\left(3-\sqrt{3}\right).$$

δ) $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)\eta\mu AOB \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2}\cdot\eta\mu 15^\circ=\frac{3}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow$$

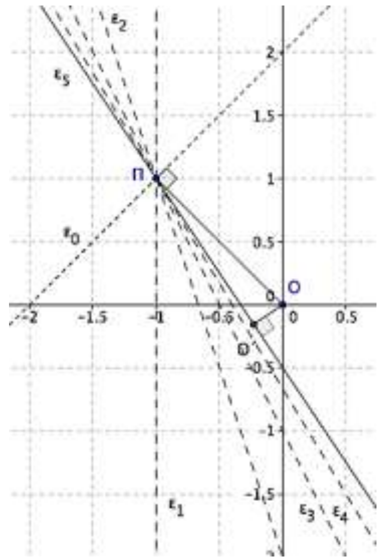
$$\sqrt{12}\cdot\sqrt{18}\cdot\eta\mu 15^\circ=3\left(3-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\eta\mu 15^\circ=3\left(3-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$6\sqrt{6}\eta\mu 15^\circ=3\left(3-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 15^\circ=\frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{6\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu 15^\circ=\frac{3\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{\cancel{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}\cdot\cancel{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

20939.α) Η εξίσωση $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2=0$ δεν είναι ευθεία όταν $\begin{cases}\lambda+1=0\\ \lambda-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=1\end{cases}$ αδύνατο, οπότε είναι εξίσωση ευθείας για κάθε $\lambda\in\{0,1,2,3,4,5\}$.



β) Για λ = 0 είναι $x-y+2=0$ και για λ = 1 είναι

$2x+2=0\Leftrightarrow 2x=-2\Leftrightarrow x=-1$.

Δύο από τους αγωγούς έχουν εξισώσεις $x-y+2=0$, $x=-1$ και η πηγή Π είναι το κοινό σημείων των αγωγών, άρα

$\begin{cases}x-y+2=0\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1-y+2=0\\ x=-1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}y=1\\ x=-1\end{cases}$, δηλαδή $\Pi(-1,1)$.

γ) Κάποιος από τους αγωγούς $(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2=0$ διέρχεται από το Ο, αν υπάρχει τιμή του λ για την οποία

$(\lambda+1)\cdot 0+(\lambda-1)\cdot 0+2=0\Leftrightarrow 2=0$ αδύνατο. Επομένως το Ο(0,0) δεν ανήκει σε κάποια από τις ευθείες.

δ) i. Η απόσταση του χωριού Ο από τη πηγή Π είναι

$(O\Pi)=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$, ενώ η απόσταση του Ο από τις ευθείες ε:

$(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+2=0$, είναι $d(O,\varepsilon)=\dfrac{|(\lambda+1)\cdot 0-(\lambda-1)\cdot 0+2|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}}\Leftrightarrow$

$$d(O,\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda+1+\lambda^2-2\lambda+1}}=\frac{2}{\sqrt{2\lambda^2+2}}\Leftrightarrow$$

$$d(O,\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}}.$$

$$d(O,\varepsilon)=(O\Pi)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\lambda^2+1}=1\Leftrightarrow$$

$\lambda^2+1=1\Leftrightarrow\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda=0$.

Δηλαδή οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής για λ=0 και ο αγωγός με τον οποίο θα μπορούσε να συνδεθεί το χωριό Ο είναι αυτός που διέρχεται από την ευθεία $\varepsilon_1 : x - y + 2 = 0$.

ii. Επειδή η απόσταση του Ο από την ε_1 είναι ίση με την απόσταση του Ο από το Π και το Π είναι σημείο της ε_1, συμπεραίνουμε ότι το Π είναι η προβολή του Ο στην ε_1.

22067.α) Ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει στη διχοτόμο δ_1, αν και μόνο αν

$$d(M,\varepsilon) = d(M, x'x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{|-\lambda x + y|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = |y| \Leftrightarrow \frac{-\lambda x + y}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \pm y \Leftrightarrow -\lambda x + y = \pm y\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(-\lambda x + y = y\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow y\sqrt{1+\lambda^2} - y = -\lambda x \Leftrightarrow\right.$$

$$\left. y\left(\sqrt{1+\lambda^2} - 1\right) = -\lambda x \Leftrightarrow y = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}-1}x\right) \text{ ή}$$

$$\left(-\lambda x + y = -y\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow y\sqrt{1+\lambda^2} + y = \lambda x \Leftrightarrow\right.$$

$$\left. y\left(\sqrt{1+\lambda^2} + 1\right) = \lambda x \Leftrightarrow y = \frac{\lambda x}{\sqrt{1+\lambda^2}+1}\right).$$

Είναι $1+\lambda^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\lambda^2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+\lambda^2} - 1 > 0$, $\lambda > 0$, οπότε

$-\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}-1} < 0$, άρα η εξίσωση $y = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}-1}x$ δεν ανήκει στη δ_1, αφού αυτή σχηματίζει οξεία γωνία με τον x΄x και $\lambda_1 = \varepsilon\varphi\omega_1 > 0$.

Άρα η δ_1 έχει εξίσωση $y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}$.

β) Επειδή οι εξισώσεις $y = \dfrac{\lambda x}{\sqrt{1+\lambda^2}+1}$, $y = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}-1}x$ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζει η ε με τον x΄x και η δ_1 έχει τη πρώτη εξίσωση, η δ_2 έχει τη δεύτερη εξίσωση.

γ) Για λ = 1 είναι $\lambda_1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = \sqrt{2}-1.$$

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον x΄x, τότε
$\lambda = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$.

Επειδή η δ_1 είναι διχοτόμος της γωνίας ω, είναι $\omega_1 = 22,5^\circ$, άρα
$\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1$.

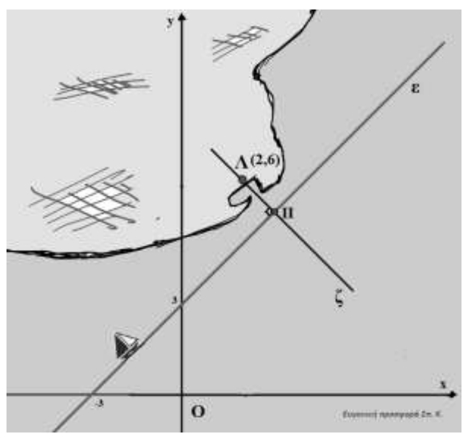
22073.α) i. Για το σημείο Π ισχύει ότι

$$\begin{cases} x_\Pi = \lambda - 1 \\ y_\Pi = 2 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Pi + 1 = \lambda \\ y_\Pi = 2 + x_\Pi + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Pi + 1 = \lambda \\ y_\Pi = x_\Pi + 3 \end{cases}.$$

Επειδή οι συντεταγμένες του Π επαληθεύουν την εξίσωση $y = x + 3$, το πλοίο Π κινείται στην ευθεία αυτή.

ii. Το πλοίο κα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ(2,6) επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση x-y+3=0. Για y=6 και x =2 έχουμε 2-6+3 = -1 $\neq$ 0.
Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β) i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΛΠ, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία η που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ.



Είναι $d(\Lambda,\varepsilon) = \dfrac{|2-6+3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow$

$d(\Lambda,\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη στην ε, άρα
$\lambda_\zeta \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = -1$ και η εξίσωση της είναι
$y - 6 = -(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 8$.

Η θέση του πλοίου είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και η, που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων τους.

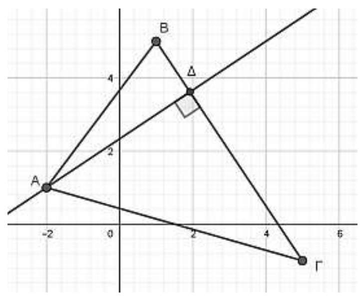
$$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + x + y = -3 + 8 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 5 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 8 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{11}{2} \end{cases}$$

. Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$.

22262.α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (1+2, 5-1) = (3,4)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (5+2, -1-1) = (7,-2)$ και $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 28 = -34$.

$(AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right| = 17$.



β) Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{-1-5}{5-1} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$ και

ΒΓ:

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$$

γ) Έστω ΑΔ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α. Είναι

$$A\Delta \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma}\lambda_{A\Delta} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Delta} = \frac{2}{3}.$$

Το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση: $y - 1 = \dfrac{2}{3}(x+2) \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ. Από το σύστημα των ΒΓ, ΑΔ έχουμε

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2} \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2} \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x + 14 = -9x + 39 \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 25 \\ y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{25}{13} \\ y = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{25}{13} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{47}{13} \end{cases},$$

άρα $\Delta\left(\dfrac{25}{13}, \dfrac{47}{13}\right)$.

δ) Έστω M(x, y) . Είναι $\overrightarrow{AM}=(x+2,y-1)$,

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=\begin{vmatrix}3 & 4\\ x+2 & y-1\end{vmatrix}=3y-3-4x-8=3y-4x-11.$$

$$(MAB)=\frac{1}{2}(AB\Gamma)\Leftrightarrow\frac{1}{2}|3y-4x-11|=\frac{1}{2}\cdot 17\Leftrightarrow |3y-4x-11|=17\Leftrightarrow$$

$(3y-4x-11=17\Leftrightarrow 3y-4x-28=0)$ ή

$(3y-4x-11=-17\Leftrightarrow 3y-4x+6=0)$

Άρα το σημείο M ανήκει στην ευθεία ε_1: 4x - 3 y - 6 = 0 ή ε_2: 4x - 3 y + 28 = 0.

22265.α) Αν Γ(x, y) τότε: $\begin{cases}x=\mu-1\\ y=3\mu-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\mu\\ y=3(x+1)-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\mu-1\\ y=3x+1\end{cases}$,

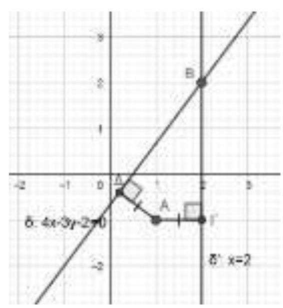
επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(2-1,2+1)=(1,3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(\mu-1-1,3\mu-2+1)=(\mu-2,3\mu-1)$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1 & 3\\ \mu-2 & 3\mu-1\end{vmatrix}=3\mu-1-3\mu+6=5\neq 0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{A\Gamma}$$ οπότε

τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά.

γ) $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{5}{2}=$ σταθερό για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.



δ) Από το σημείο B(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ΄: x = 2 και δ: $y-y_B=\lambda(x-x_B)\Leftrightarrow$

$y-2=\lambda(x-2)\Leftrightarrow\lambda x-y+2-2\lambda=0$.

Είναι: d(A, δ΄) = $|2 - x_A|$= |2 - 1|= 1, οπότε η ευθεία δ΄: x = 2 αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα.

Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι $d(A,\delta)=\dfrac{|\lambda\cdot 1-1\cdot(-1)+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\dfrac{|\lambda+1+2-2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$

Είναι $d(A,\delta)=1\Leftrightarrow\dfrac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=1\Leftrightarrow|3-\lambda|=\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$

$(3-\lambda)^2=\left(\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow 9-6\lambda+\lambda^2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow 8=6\lambda \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Τότε δ: $\dfrac{4}{3}x-y+2-2\cdot\dfrac{4}{3}=0 \Leftrightarrow 4x-3y-2=0$

22266.α) Η (Ε) δεν ήταν εξίσωση ευθεία για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $\begin{cases}2\lambda+1=0\\ \lambda-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{2}\\ \lambda=2\end{cases}$ άτοπο.

Επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=2$ η (Ε) γίνεται $5x-5=0\Leftrightarrow x=1$.

Για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ η (Ε) γίνεται

$-\left(-\dfrac{1}{2}-2\right)y-\dfrac{1}{2}-7=0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}y-\dfrac{15}{2}=0 \Leftrightarrow 5y=15 \Leftrightarrow y=3\cdot$

Οι ευθείες $x=1$ και $y=3$ που είναι δύο από τις ευθείες (Ε) τέμνονται στο σημείο $M(1,3)$, για να διέρχονται όλες οι ευθείες της (Ε) από το Μ πρέπει:

$(2\lambda+1)\cdot 1-(\lambda-2)\cdot 3+\lambda-7=0 \Leftrightarrow 2\lambda+1-3\lambda+6+\lambda-7=0$ που ισχύει.

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_1=(-8,-6)$.

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2=(-\lambda+2,-2\lambda-1)$.

ε//ζ αν και μόνο αν $\vec{\delta}_1 // \vec{\delta}_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-8 & -6\\ -\lambda+2 & -2\lambda-1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$16\lambda+8-6\lambda+12=0\Leftrightarrow 10\lambda=-20\Leftrightarrow\lambda=-2$.

Τότε η (Ε) γίνεται: $3x+4y-9=0$ που είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): 6x-8y+3=0, οπότε $d(M,\zeta)=\dfrac{|6\cdot 1-8\cdot 3+3|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\dfrac{15}{10}=\dfrac{3}{2}$.

3ο Θέμα

15152.α) $(\text{AB})=\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$.

β) $d(\text{A},\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+1\cdot 3+\alpha|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}}$.

Είναι

$$d(\text{A},\varepsilon)=(\text{AB})\Leftrightarrow\frac{|\alpha+6|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\Leftrightarrow|\alpha+6|=10\Leftrightarrow(\alpha+6=10\Leftrightarrow\alpha=4)\text{ ή}$$

$(\alpha+6=-10\Leftrightarrow\alpha=-16)$.

γ) Για $\alpha=4$ είναι $\varepsilon: 3x+y+4=0$.

Για $x=0$ η ε γίνεται $y+4=0\Leftrightarrow y=-4$, άρα $\Gamma(0,-4)$.

Είναι $\overrightarrow{\text{AB}}=(-2-1,2-3)=(-3,-1)$, $\overrightarrow{\text{A}\Gamma}=(0-1,-4-3)=(-1,-7)$,

$$\det\left(\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{A}\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}=21-1=20$$

οπότε $(\text{AB}\Gamma)=\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{AB}},\overrightarrow{\text{A}\Gamma}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 20=10$ τ.μ.

Κωνικές τομές

Κύκλος

2ο Θέμα

15028.α) Είναι $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$.

γ) Αφού $d(K,\varepsilon)=2=\rho$ τότε η (ε) εφάπτεται στον κύκλο C.

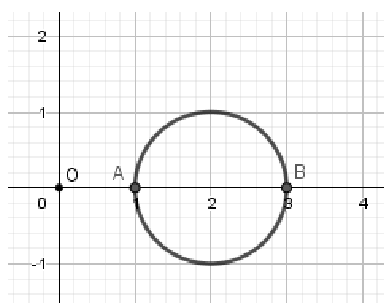
15680.α) Είναι $x^2+y^2-2x-4y+1=0\Leftrightarrow$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=4\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$, οπότε ο κύκλος C έχει ακτίνα ρ = 2.

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{12}{5}$.

γ) Επειδή η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του κύκλου, η ε είναι εξωτερική του κύκλου, οπότε δεν έχουν κοινά σημεία.

15994.α) Είναι



$x^2+y^2-4x+3=0\Leftrightarrow(x^2-4x+4)+y^2=4-3\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=1$, άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ = 1.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι ο κύκλος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία A(1,0) και B(3,0).

16773.α) Αν ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε $\rho = (OA) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$.

β) i. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $x \cdot 1 + y \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow x + 2y = 5$.
ii. Επειδή το κέντρο O είναι το μέσο του τμήματος AB, ισχύει ότι
$x_O = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{1 + x_B}{2} \Leftrightarrow 1 + x_B = 0 \Leftrightarrow x_B = -1$ και
$y_O = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 0 = \dfrac{2 + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 + y_B = 0 \Leftrightarrow y_B = -2$, άρα $B(-1,-2)$.

16808.α) Αρκεί να δείξουμε ότι το μέσο K του τμήματος AB απέχει από το σημείο Γ απόσταση ίση με $\dfrac{AB}{2}$.
Είναι $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -2,\ y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 3$, άρα K(-2,3).
Είναι $(AB) = \sqrt{(4+8)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ και
$(K\Gamma) = \sqrt{(-2+4)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = \dfrac{AB}{2}$.
β) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο K(-2,3) και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{10}$, άρα η εξίσωση του κύκλου είναι C: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 40$.

17317.α) Ο κύκλος έχει κέντρο K(1,2) και ακτίνα ρ = 2.
β) $d(K,\varepsilon) = \dfrac{|3\cdot 1 - 4\cdot 2 - 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{13}{5}$.

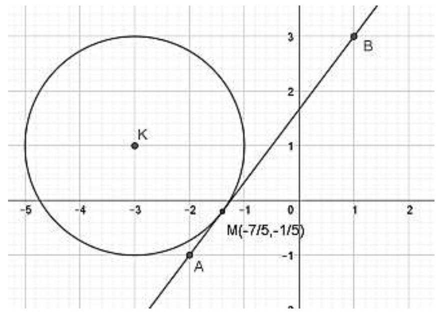
γ) Επειδή $d(K,\varepsilon) = \dfrac{13}{5} > \rho = 2$ η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

18238.α) Είναι $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1,\ y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 4$, άρα $K(-1,4)$.
β) $(KA) = \sqrt{(1+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.
γ) Ο κύκλος διαμέτρου AB έχει κέντρο K και ακτίνα $\rho = (KA) = \sqrt{5}$ άρα έχει εξίσωση $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

18239.α) $d(K,\varepsilon)=\frac{|4\cdot(-3)-3\cdot 1+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$.

β) Ο ζητούμενος κύκλος έχει ακτίνα $\rho=d(K,\varepsilon)=2$ και εξίσωση $(x+3)^2+(y-1)^2=4$.

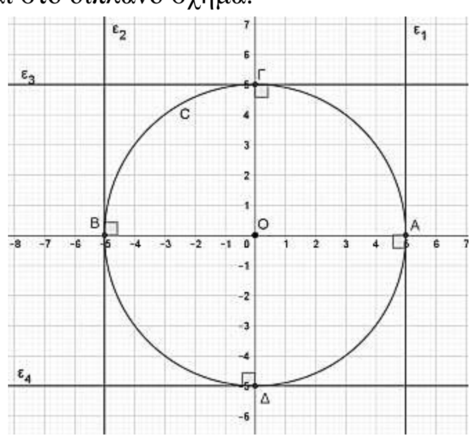
γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(-2,-1)$ και B(1,3), αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

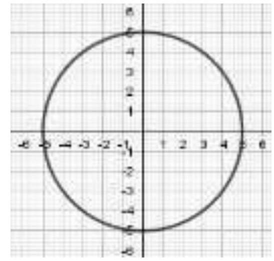


18241.α) Ο κύκλος C , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει κέντρο το O(0,0) και ακτίνα $\rho = 5$.
Τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x είναι τα σημεία A(5,0) και B(- 5,0) ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα y΄y είναι τα σημεία Γ(0,5) και Δ (0,- 5).

β) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Γ(0,5) και Δ (0,- 5).
Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον y΄y οπότε παράλληλες στον x΄x και διέρχονται από τα σημεία Γ(0,5) και Δ (0,- 5) , άρα έχουν εξισώσεις y = 5 και y = –5 αντίστοιχα.
Είναι οι ευθείες ε_3 , ε_4, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

γ) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A(5,0) και B(- 5,0).
Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον x΄x οπότε παράλληλες στον y΄y και διέρχονται από τα σημεία A(5,0) και B(- 5,0) , άρα έχουν εξισώσεις x = 5 και x =–5 αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες ε_1,ε_2 που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.





18700.α) C: $x^2+y^2=25$.

β) i. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο όταν $3^2+(-4)^2=25 \Leftrightarrow 9+16=25$ ισχύει.

ii. $x\cdot 3+y(-4)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=25$.

18749.α) Επειδή τα σημεία Β, Γ έχουν τεταγμένη 2, η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση y = 2. Επειδή η ΑΔ είναι κάθετη στη ΒΓ και διέρχεται από το Α(5, 6) έχει εξίσωση x = 5.
β) Το Δ είναι το σημείο τομής των ΒΓ: y = 2 και ΑΔ: x = 5, άρα Δ(5,2).
γ) Η ακτίνα του κύκλου είναι η ΑΔ και έχει μήκος ρ = (ΑΔ)= 6 – 2 = 4, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-5)^2+(y-6)^2=16$.

18968.α) $x^2+y^2-6x-8y=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16=9+16 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2+(y-4)^2=25$.
Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho=5$.

β) $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|3\cdot 3+3\cdot 4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{25}{5}=5$

γ) Επειδή $d(K,\varepsilon)=5=\rho$, ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται.

19039.α) $(x-1)(x+3)+(y+1)(y-3)=-4 \Leftrightarrow$
$x^2+3x-x-3+y^2-3y+y-3=-4 \Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y=2 \Leftrightarrow$
$x^2+2x+1+y^2-2y+1=4 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=2^2$ (2).
Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(−1,1) και ακτίνα R = 2.
β) i. Η εξίσωση (2) γίνεται για x = −1:
$(-1+1)^2+(y-1)^2=2^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=2^2 \Leftrightarrow y-1=\pm 2 \Leftrightarrow y=3$ ή $y=-1$
Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι: Α(−1, −1) και Β(−1,3).
ii. Τα σημεία Α και Β βρίσκονται στην ευθεία x = −1, η οποία διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Επομένως, τα σημεία Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

20890.α) Η ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{-3+8}{7-2} = 1$ και εξίσωση

$y+8 = (x-2) \Leftrightarrow x - y - 10 = 0$.

β) Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι

$\rho = d(A, B\Gamma) = \frac{|3-(-3)-10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ και η εξίσωση του είναι:

$(x-3)^2 + (y+3)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 = 8$.

21962.α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{4-3}{3-0} = \frac{1}{3}$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-3}{1-0} = -3$. Είναι

$\lambda_{AB}\lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow AB \perp A\Gamma \Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

β) Είναι $x_K = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$, $y_K = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$, άρα K(2,2).

γ) Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$, είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με: $(B\Gamma) = \sqrt{(1-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα έχει ακτίνα R= $\frac{(B\Gamma)}{2}$ και κέντρο το σημείο Κ, οπότε η εξίσωσή του είναι:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

21965.α) Είναι $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$, $y_M = \frac{-4-2}{2} = -3$, άρα

$M(1,-3)$.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{-2+4}{0-2} = -1$ και $(\zeta) \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\zeta \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = 1$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος ΑΒ είναι:

$y+3 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x - 4$.

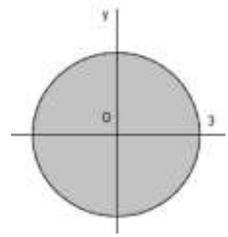
γ) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$\begin{cases} y = x-4 \\ y = 2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6 = x-4 \\ y = 2x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4-6 = -2 \end{cases}$. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο (2, -2).

γ) Το κέντρο Κ του κύκλου θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ, την ευθεία (ζ) και στην ευθεία (ε) άρα θα πρέπει να είναι το σημείο τομής τους που βρήκαμε στο ερώτημα β), δηλαδή το Κ(2, -2). Η ακτίνα του κύκλου είναι ρ = (ΚΑ) = (ΚΒ) αλλά

ρ = (ΚΒ) = $\sqrt{(2-0)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$.



22056.α) 1ος τρόπος: Αφού $x^2 + y^2 \leq 9$ καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για όλους τους κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho \in (0,3]$ καθώς και την αρχή των αξόνων. Άρα το σύνολο των σημείων αυτών αποτελούν τον κυκλικό δίσκο (μαζί με την περιφέρειά του) που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 3.

2ος τρόπος: Είναι $x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \Leftrightarrow (OM) \leq 3$ με $M(x,y)$ άρα πρόκειται για όλα τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

β) Όχι διότι είναι $|\overrightarrow{OA}| = 4$ άρα το Α απέχει από την αρχή των αξόνων 4 και δεν ανήκει στο σύνολο Ω.

22147.α) Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 1+1+14 = 16 > 0$, επομένως, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ή $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

β) Επειδή $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{10}{4} - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$ ισχύει, οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου, το σημείο Α είναι σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Η εφαπτομένη του κύκλου (K,R) στο A είναι κάθετη στην ακτίνα KA. Αφού είναι $x_K = x_A$, η ακτίνα KA είναι κάθετη στον άξονα x΄x, οπότε η εφαπτομένη του κύκλου στο A θα είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. Άρα, θα έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{2}$.

22172.α) $d(A,\varepsilon) = \frac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$.

β) Είναι $\varepsilon:\ 3x - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x$ με $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$.

Είναι $\eta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\eta \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\eta = -\frac{4}{3}$ και η (η) έχει εξίσωση:

$y - 1 = -\frac{4}{3}(x+2) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

γ) Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι $\rho = d(A,\varepsilon) = 2$, οπότε η εξίσωσή του είναι $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

22279.α) $(y-1)^2 = (3+x)(1-x) \Leftrightarrow (y-1)^2 = 3 - 3x + x - x^2 \Leftrightarrow$

$(y-1)^2 + x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (y-1)^2 + x^2 + 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow$

$(y-1)^2 + (x+1)^2 = 2^2$.

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο K(−1,1) και ακτίνα R = 2

β) Είναι $(KO) = \sqrt{(0+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} < 2 = R$, άρα η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R).

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία (ε) με εξίσωση x + y − 2 = 0. Είναι:

$d(K,\varepsilon) = \frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R = 2$, άρα η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R).

4ο Θέμα

14954.α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $|A| + |B| > 0$, δηλαδή όταν οι αριθμοί Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$ ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1$, $B = \mu - 1$ και $A = 0$ για $\mu = -1$, $B = 0$ για $\mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές Α και Β.

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Άρα το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ είναι παράλληλο στην (ε_1) και το $\vec{\delta}_2 = (1-\mu, 1+\mu)$ παράλληλο στην (ε_2). Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2)θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας φ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = \dfrac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1||\vec{\delta}_2|} = \dfrac{1\cdot(1-\mu)+\mu(1+\mu)}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{(1-\mu)^2+(1+\mu)^2}} \Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = \frac{1-\mu+\mu+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{1-2\mu+\mu^2+1+2\mu+\mu^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{2+2\mu^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = \frac{1-\mu+\mu+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{1-2\mu+\mu^2+1+2\mu+\mu^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{2(1+\mu^2)}} = \frac{1+\mu^2}{\sqrt{1^2+\mu^2}\sqrt{2}\sqrt{1^2+\mu^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = \frac{1+\mu^2}{\left(\sqrt{1^2+\mu^2}\right)^2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{1+\mu^2}}{\cancel{(1+\mu^2)}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{\theta} = \left(\vec{\delta}_1 \hat{,} \vec{\delta}_2\right) = 45^\circ.$$

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$(\mu+1)x+(\mu-1)(\mu x-\mu)-\mu+1=0 \Leftrightarrow$

$(\mu+1)x+\mu(\mu-1)x-\mu(\mu-1)-\mu+1=0$ άρα

$(\mu+1+\mu^2-\mu)x-\mu^2+\mu-\mu+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1}$. Τότε

$y=\mu\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1}-\mu=\dfrac{-2\mu}{\mu^2+1}$.

Έτσι τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι τα $\Sigma\left(\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1},\dfrac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)$, $\mu\in\mathbb{R}$.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Σ επαληθεύουν την εξίσωση αυτή.

Είναι $\left(\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{-2\mu}{\mu^2+1}\right)^2=\dfrac{\mu^4-2\mu^2+1}{(\mu^2+1)^2}+\dfrac{4\mu^2}{(\mu^2+1)^2}=$

$\dfrac{\mu^4-2\mu^2+1+4\mu^2}{(\mu^2+1)^2}=\dfrac{\mu^4+2\mu^2+1}{(\mu^2+1)^2}=\dfrac{(\mu^2+1)^2}{(\mu^2+1)^2}=1$.

15030.α) Κέντρο Κ(2, -3) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|2\cdot2-3+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$,άρα η ευθεία ε και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta=-2$, οπότε η (η) έχει εξίσωση της μορφής $y=-2x+\beta \Leftrightarrow 2x+y-\beta=0$.

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$d(K,\eta)=\rho \Leftrightarrow \dfrac{|2\cdot2+1(-3)-\beta|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |1-\beta|=5 \Leftrightarrow 1-\beta=\pm5 \Leftrightarrow$

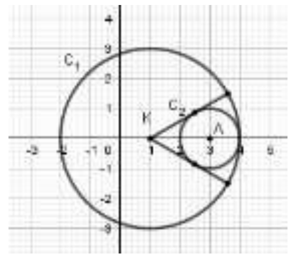
$\beta=-4$ ή $\beta=6$.

Άρα έχουμε δύο εφαπτομένες, τις $(\eta_1): 2x+y+4=0$ και

$(\eta_2): 2x+y-6=0$.

Η μεσοπαράλληλη των (η_1), (η_2) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με αυτές, δηλαδή $\lambda_\eta = -2$ και διέρχεται από το Κ, άρα έχει εξίσωση:

$y+3=-2(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+1$.



15080.α) Είναι $C_1 : x^2+y^2-2x-8=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-2x+1)+y^2=8+1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=3^2$

άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

Είναι $C_2 : x^2+y^2-6x+8=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-6x+9)+y^2=9-8 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=1$ άρα

η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Λ(3,0) και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β) i. $(\mathrm{K\Lambda})=|3-1|=2$

ii. Είναι $(\mathrm{K\Lambda})=2$ και $\rho_1-\rho_2=2$, άρα $(\mathrm{K\Lambda})=\rho_1-\rho_2$ οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1.

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1, ΚΑ και ΚΒ σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον x΄x άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Κ(1,0) και έχει κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα κα έχει εξίσωση: (ε): $y-0=\lambda(x-1) \Leftrightarrow -\lambda x+y+\lambda=0$.

Η (ε) εφάπτεται στον κύκλο C_2, αν και μόνο αν:

$$d(\Lambda,\varepsilon)=\rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0-3\lambda+\lambda|}{\sqrt{1^2+\lambda^2}}=1 \Leftrightarrow |2\lambda|=\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2=1+\lambda^2 \Leftrightarrow 3\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Οι ζητούμενες ακτίνες έχουν εξισώσεις:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x+y+\frac{\sqrt{3}}{3}=0 \Leftrightarrow -x\sqrt{3}+3y+\sqrt{3}=0 \text{ και}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+y-\frac{\sqrt{3}}{3}=0 \Leftrightarrow x\sqrt{3}+3y-\sqrt{3}=0.$$

15081.α) $C_1 : x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 1$, άρα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$.

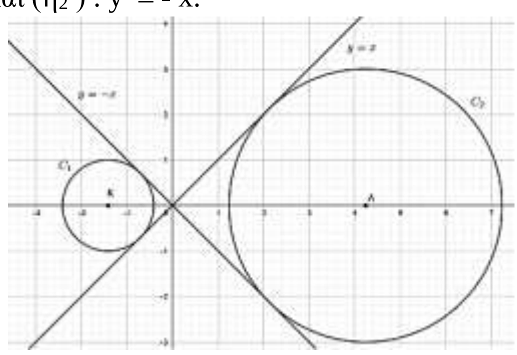
$C_2 : x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 3\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 9$, άρα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $\Lambda\left(3\sqrt{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho_2 = 3$.

β) i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και δεν είναι κάθετη στον x΄x άξονα έχει εξίσωση: (η): $y = \lambda x \Leftrightarrow -\lambda x + y = 0$.
Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων Κ και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{cases} d(K,\eta) = 1 \\ d(\Lambda,\eta) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\left|0 + \sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1 \\ \dfrac{\left|0 - 3\sqrt{2}\lambda\right|}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\left|\lambda\right| = \sqrt{1+\lambda^2} \\ 3\sqrt{2}\left|\lambda\right| = 3\sqrt{1+\lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda^2 = 1 + \lambda^2 \\ 18\lambda^2 = 9 + 9\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:
$(\eta_1) : y = x$ και $(\eta_2) : y = -x$.



ii. Η αρχή των αξόνων (0, 0) είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου ΚΛ, διότι η ΚΛ είναι πάνω στον άξονα x΄x και έχει άκρα τα σημεία $K\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ και $\Lambda\left(3\sqrt{2}, 0\right)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο βi) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

15082.α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ(2,3) και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(7,-2)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Είναι $(\mathrm{K}\Lambda) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) i. Η ευθεία ΚΛ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\mathrm{K}\Lambda} = \dfrac{-2-3}{7-2} = -1$ και εξίσωση $y-3 = -(x-2) \Leftrightarrow y = -x+5$.

ii. Είναι $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(-x+5-3)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x-2)^2+(-x+2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(x-2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x-2)^2=8\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x-2)^2=4\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=\pm 2\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$ ή $\begin{cases}x=0\\ y=5\end{cases}$.

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Για το σημείο επαφής των δύο κύκλων έχουμε το σύστημα:

$\begin{cases}(x-7)^2+(y+2)^2=18\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-7)^2+(-x+5+2)^2=18\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x-7)^2+(-x+7)^2=18\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x-7)^2=18\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-7)^2=9\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x-7=\pm 3\\ y=-x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\ y=-5\end{cases}$ ή $\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$.

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_2 είναι τα $A(4,1)$ και $A''(10,5)$.

Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το Α(4,1) , οπότε είναι το σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία ΚΛ και διέρχεται από το σημείο επαφής Α(4,1). Στο ερώτημα β)i έχουμε βρει ότι $\lambda_{K\Lambda}=-1$, οπότε $\lambda_{K\Lambda}\lambda_{\eta}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\eta}=1$ και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων έχει εξίσωση:
$y-1=x-4\Leftrightarrow y=x-3$.

15177.α) $\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2=4\Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}-2x+1+y^2-\cancel{x^2}-\left(y^2+2y+1\right)=4\Leftrightarrow-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-2y-\cancel{1}=4\Leftrightarrow$

$-2y=2x+4\Leftrightarrow y=-x-2$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία ανήκουν σε ευθεία(ε) με εξίσωση $y=-x-2$.

β) $2x^2+2y^2+10x+14y+21=0\overset{:2}{\Leftrightarrow}x^2+y^2+5x+7y+\frac{21}{2}=0\Leftrightarrow$

$x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+y^2+2\cdot\frac{7}{2}y=-\frac{21}{2}\Leftrightarrow$

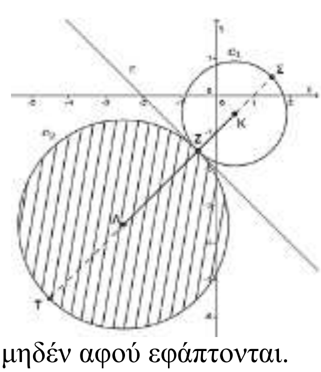
$x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2+2\cdot\frac{7}{2}y+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{21}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{42}{4}+\frac{25}{4}+\frac{49}{4}\Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{116}{4}\Leftrightarrow\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=8$.

Άρα τα σημεία R ανήκουν σε κύκλο c_2, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R=2\sqrt{2}$.

γ) i. Ο κύκλος c_1 έχει κέντρο $K\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.



Είναι $(K\Lambda)=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=$
$\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=R+\rho$, οπότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
$d(c_1,c_2)_{max}=(K\Lambda)+R+\rho=6\sqrt{2}$ και η ελάχιστη απόσταση των δύο κύκλων είναι μηδέν αφού εφάπτονται.

ii. (ε): $y=-x-2\Leftrightarrow x+y+2=0$.

Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{\left|1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho$, άρα η ε εφάπτεται στον c_1.

Είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{\left|1\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+1\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=R$, άρα η ε εφάπτεται στο κύκλο c_2.

15189.α) Είναι $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=0,\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-1$, άρα $K(0,-1)$.

$(AB)=\sqrt{(2+2)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

β) C: $(x-0)^2+(y+1)^2=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=5$.

γ) Είναι $\overrightarrow{AM}=(x+2,y)$, $\overrightarrow{AB}=(2+2,-2-0)=(4,-2)$ και

$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}x+2 & y\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2x-4-4y=-2(x+2y+2)$.

Είναι $(AMB)=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right|=5\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot 2|x+2y+2|=5\Leftrightarrow$

$|x+2y+2|=5\Leftrightarrow$

$(x+2y+2=5\Leftrightarrow x+2y-3=0)$ ή $(x+2y+2=-5\Leftrightarrow x+2y+7=0)$

δ) Είναι $d(K,\varepsilon_1)=\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot(-1)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}=\rho$ και

$d(K,\varepsilon_2)=\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}=\rho$, άρα οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ εφάπτονται του κύκλου C.

15272.α) $x^2+y^2-2x+4y=-1\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=1+4-1\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο K(1, - 2) και ακτίνα ρ = 2.

β) Είναι $(KM)=\sqrt{(3-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>2=\rho$, οπότε το σημείο M βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Αν η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της θα είναι της μορφής

ε: $y-2=\lambda(x-3)\Leftrightarrow \lambda x-y-3\lambda+2=0$.

Η ε εφάπτεται στον κύκλο, αν και μόνο αν

$$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 1-(-2)-3\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow |4-2\lambda|=2\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{2}|2-\lambda|=\cancel{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(2-\lambda)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow$$

$$4-4\lambda+\cancel{\lambda^2}=\cancel{\lambda^2}+1\Leftrightarrow 3=4\lambda\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{4}.$$

Άρα ε: $\frac{3}{4}x-y-3\cdot\frac{3}{4}+2=0\Leftrightarrow 3x-4y-1=0$.

Όμως από το Μ διέρχονται δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο. Από το Μ διέρχεται ακόμη η κατακόρυφη ευθεία x = 3 της οποίας η απόσταση από το κέντρο Κ του κύκλου είναι: $d=\frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}}=2=\rho$, άρα η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Μ είναι η x = 3.

15432.α) $x^2+y^2-4\kappa x-2\kappa y+4=0\Leftrightarrow$

$$x^2-4\kappa x+4\kappa^2+y^2-2\kappa y+\kappa^2=4\kappa^2+\kappa^2-4\Leftrightarrow$$

$$(x-2\kappa)^2+(y-\kappa)^2=5\kappa^2-4.$$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο όταν

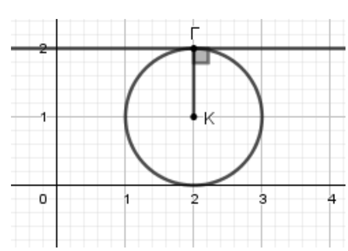
$$5\kappa^2-4>0\Leftrightarrow\kappa^2>\frac{4}{5}\Leftrightarrow|\kappa|>\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Leftrightarrow\kappa<-\frac{2\sqrt{5}}{5}\text{ ή }\kappa>\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

β) Για $\kappa<-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ή $\kappa>\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ο κύκλος έχει κέντρο Κ(2κ, κ) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5\kappa^2-4}$.

γ) Είναι $x_K=2\kappa$ και $y_K=\kappa$, άρα

$$x_K=2x_K=2y_K\Leftrightarrow y_K=\frac{1}{2}x_K$$

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ επαληθεύουν την εξίσωση



$y=\frac{1}{2}x$,οπότε το Κ ανήκει στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

δ) Για κ = 1 είναι $C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$

Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΓ που έχει εξίσωση x = 2, οπότε η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα y΄y και επειδή η τεταγμένη του Γ είναι 2, είναι η ευθεία y = 2.

15628.α) Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=(4-2k)^2+(-2(1+k))^2-4(5-2k)\Leftrightarrow$

$A^2+B^2-4\Gamma=16-16k+4k^2+4(1+2k+k^2)-20+8k=$

$-\cancel{4}-\cancel{8k}+4k^2+\cancel{4}+\cancel{8k}+4k^2=8k^2$.

Επειδή $A^2+B^2-4\Gamma>0$ η (Ι) παριστάνει κύκλο με ακτίνα

$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{2}=\sqrt{2}k$ και κέντρο

$M\left(-\frac{4-2k}{2},-\frac{-2(1+k)}{2}\right)\equiv\left(-\frac{-2(k-2)}{2},1+k\right)\equiv(k-2,k+1)$.

β) Είναι $x_M=k-2\Leftrightarrow x_M+2=k$ και

$y_M=k+1=x_M+2+1\Leftrightarrow y_M=x_M+3$. Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ επαληθεύουν την εξίσωση $y=x+3$,οπότε το Μ ανήκει στην ευθεία $y=x+3$.

γ) Η ευθεία ε: $y=-x-1\Leftrightarrow x+y+1=0$ είναι εφαπτομένη του κύκλου, αν και μόνο αν $d(M,\varepsilon)=\rho=\sqrt{2}k$.

Είναι $d(M,\varepsilon)=\frac{|k-2+k+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2k}{\sqrt{2}}=\frac{2k\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\cancel{2}k\sqrt{2}}{\cancel{2}}=k\sqrt{2}=\rho$,

οπότε η ε εφάπτεται του κύκλου για κάθε k > 0.

15646.α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο Κ(1,1) και ακτίνα $\rho_1=3$, ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο Λ(4,4) και ακτίνα $\rho_2=3$. Επειδή οι συντεταγμένες και των δύο σημείων Κ, Λ επαληθεύουν την εξίσωση y = x, τα κέντρα Κ, Λ, των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας xOy του συστήματος συντεταγμένων.

β) $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=9 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=9 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-2x-2y=7$ (1).

$C_2:(x-4)^2+(y-4)^2=9 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16=9 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2-8x-8y=-23$ (2).

Αφαιρώντας από την (1) την (2) κατά μέλη προκύπτει:

$-2x-2y+8x+8y=7+23 \Leftrightarrow 6x+6y=30 \Leftrightarrow y=5-x$ (3) και από την (1) έχουμε:

$x^2+(5-x)^2-2x-2(5-x)=7 \Leftrightarrow$

$x^2+25-10x+x^2-2x-10+2x-7=0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow$

$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$.

Αν $x=1$ τότε $y=5-1=4$ και αν $x=4$ τότε $y=5-4=1$, οπότε κοινά σημεία των δύο κύκλων είναι τα Β(1,4) και Γ(4,1).

γ) Έστω Α(x,x) σημείο της y = x. Είναι

$\overrightarrow{AB}=(1-x,4-x)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4-x,1-x)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1-x & 4-x\\ 4-x & 1-x\end{vmatrix}=(1-x)^2-(4-x)^2 \Leftrightarrow$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=1-2x+x^2-16+8x-x^2=6x-15$.

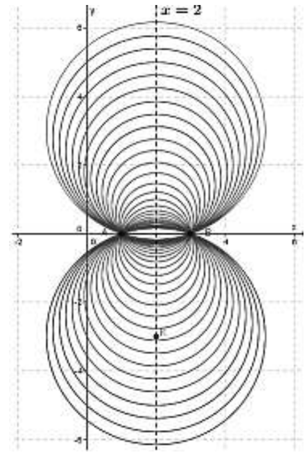
$(AB\Gamma)=\frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{21}{2} \Leftrightarrow |6x-15|=21 \Leftrightarrow$

$(6x-15=21 \Leftrightarrow 6x=36 \Leftrightarrow x=6)$ ή

$(6x-15=-21 \Leftrightarrow 6x=-6 \Leftrightarrow x=-1)$. Άρα $A(6,6)$ ή $(-1,-1)$.

15993.α) Επειδή $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(2,λ) και ακτίνα $\rho=\sqrt{\lambda^2+1}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:
Για λ = 0 είναι



$$\left(x-2\right)^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x=-3 \ (2)$$

Για λ = 1 είναι $\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=2 \Leftrightarrow$

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y=-3 \ (3)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει y = 0 και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=3$$

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα A(1,0) και B(3,0). Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα , το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα . Επομένως έχει εξίσωση y = 0. Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής Κ(2,λ), $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση x = 2.

Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

δ) Αφού το σημείο Μ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ πρέπει υποχρεωτικά να είναι το Α(1,0) ή το Β(3,0). Σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha \cdot \beta = 1 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 0$.

15791.α) Ο κύκλος C_1 κέντρου Α(0,7) και ακτίνα ρ = 2, άρα έχει εξίσωση $x^2+\left(y-7\right)^2=4$.

β) i. $\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2=4$.

ii. Είναι $\left(AB\right)=\sqrt{x_1^2+\left(7-y_1\right)^2}$.

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε: $(\mathrm{AB}) = 2 + 2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1^2 + (7 - y_1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \ (1)$.

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε:

$d(\mathrm{B}, \varepsilon) = \dfrac{|0 + x_1 - 5|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2 \Leftrightarrow |x_1 - 5| = 2 \ (2)$.

Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$\begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ |x_1 - 5| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = \pm 2 \end{cases}$. Άρα

$\begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7 - y_1)^2 = -33 \\ x_1 = 7 \end{cases}$ Αδύνατο

ή

$\begin{cases} x_1^2 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + (7 - y_1)^2 = 16 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (7 - y_1)^2 = 7 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - y_1 = \pm\sqrt{7} \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \pm \sqrt{7} = y_1 \\ x_1 = 7 \end{cases}$.

Τελικά οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και την ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $\left(3, 7 - \sqrt{7}\right), \left(3, 7 + \sqrt{7}\right)$ και ακτίνα 2.

16191α) i. Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AM}}^2 = (x - 1, \psi - 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = (x - 5, \psi - 5)$ και

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{BM}}^2 = 32 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + (\psi - 1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-5)^2 + (\psi - 5)^2}\right)^2 = 32 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + \psi^2 - 2\psi + 1 + x^2 - 10x + 25 + \psi^2 - 10\psi + 25 = 32 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 2\psi^2 - 12x - 12\psi + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \psi^2 - 6x - 6\psi + 10 = 0$.

ii. Είναι $x^2 + \psi^2 - 6x - 6\psi + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 6x + 9 + \psi^2 - 6\psi + 9 = 9 + 9 - 10 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (\psi - 3)^2 = 8$.

άρα η (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο K(3,3) και ακτίνα $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

β) i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία , πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

$$d(K,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|3\lambda+3-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |3\lambda+1|=2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(3\lambda+1)^2=8(\lambda^2+1) \Leftrightarrow 9\lambda^2+6\lambda+1=8\lambda^2+8 \Leftrightarrow$$

$\lambda^2+6\lambda-7=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-7$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_{AB}=\frac{5-1}{5-1}=1$. Ένα διάνυσμα παράλληλο στην AB είναι το $\vec{\delta}_1=(1,1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε) είναι το $\vec{\delta}_2=(1,-\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$$\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2\right)=\sigma\upsilon\nu 45^\circ \Leftrightarrow \frac{1\cdot 1+1(-\lambda)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(1-\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow 1-\lambda=\sqrt{1+\lambda^2} \overset{1-\lambda\geq 0\Leftrightarrow\lambda\leq 1}{\Leftrightarrow} (1-\lambda)^2=1+\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$1-2\lambda+\lambda^2=1+\lambda^2 \Leftrightarrow -2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0.$$

15826.α) Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=4(\lambda+1)^2+4\lambda^2-4(2\lambda+1)=$

$4\lambda^2+8\lambda+4+4\lambda^2-8\lambda-4=8\lambda^2$.

Η (1) παριστάνει κύκλο όταν $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow 8\lambda^2>0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)\equiv(\lambda+1,\lambda)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2}=\sqrt{2}|\lambda|.$$

β) Για λ = 0 η (1) γίνεται

$x^2+y^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y=0$, που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο M(1,0).

γ) i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_2, K_3 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1+1}{2-0} = 1$ και εξίσωση ζ: $y+1 = x-0 \Leftrightarrow y = x-1$.
Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ . Πράγματι το τυχαίο κέντρο Κ (λ+1,λ) ανήκει στην ευθεία ζ , αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y = x-1$.
ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο Μ(1,0) . Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το Μ(1,0) . Πράγματι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αφού $1^2 + 0^2 - 2(\lambda+1) - 2\lambda \cdot 0 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει.
iii. Θα πρέπει το κέντρο Κ(λ+1,λ) να απέχει από την ευθεία ε απόσταση ίση με την ακτίνα ρ.
Είναι $d(K,\varepsilon) = \frac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\lambda| = \rho$.

18237.α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{2-2}{3+1} = 0$ και $\lambda_{B\Gamma} = \frac{4-2}{1-3} = -1$.
Επειδή $\lambda_{AB} \neq \lambda_{B\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά και σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Έστω Μ το μέσο του ΒΓ. Είναι $x_M = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = 2$, $y_M = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = 3$, άρα Μ(2,3).
Αν ε η μεσοκάθετος του ΒΓ, τότε $\varepsilon \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$ και η ε έχει εξίσωση: $y-3 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x+1$.
γ) Έστω Κ(x, y) το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Τότε $y = x+1$ και

$$(KA) = (KB) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2 + \cancel{(y-2)^2} = (x-3)^2 + \cancel{(y-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 1+1 = 2,$$

άρα Κ(1,2).
δ) Το σημείο Κ από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει .

$\rho=(\text{KA})=\sqrt{(1+1)^2+(2-2)^2}=2$ και ο κύκλος έχει εξίσωση:
$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

18247.α) i. Είναι $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$, $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{\beta}{2}$, άρα $M\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$.

ii. Είναι

$$(\text{OM})=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

β) i. Είναι $(\text{AB})=\sqrt{(\alpha-0)^2+(0-\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, άρα

$$(\text{OM})=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}=\frac{(\text{AB})}{2}.$$

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

γ) Επειδή $(\text{OM})=\dfrac{(\text{AB})}{2}=(\text{AM})=(\text{MB})$ το Μ ισαπέχει από τα Ο, Α, Β οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΒ.
Η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}.$$

18415α) Η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3\lambda,-2\lambda)$ και ακτίνα ρ = 1.

Είναι $x_K=3\lambda\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{x_K}{3}$ και $y_K=-2\lambda=-2\dfrac{x_K}{3}\Leftrightarrow 3y_K+2x_K=0$.

Οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση $3y+2x=0$, οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία ε.

β) Αν $M(x,y)$ σημείο της ε_1 ή της ε_2, τότε:

$$d(M,\varepsilon)=1\Leftrightarrow\frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}=1\Leftrightarrow|2x+3y|=\sqrt{13}\Leftrightarrow 2x+3y=\pm\sqrt{13}$$, οπότε

οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν εξισώσεις $2x+3y=\sqrt{13}$, $2x+3y=-\sqrt{13}$.

γ) Αφού τα κέντρα Κ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην ε, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, έχουμε ότι

$d(K,\varepsilon_1)=d(K,\varepsilon_2)=1=\rho$, επομένως όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.
δ) Ένα τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του κα είναι ίσο με 4.

18416.α) Είναι

$$x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8\Leftrightarrow$$
$$x^2-6x+y^2-4y=-8\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-4y+8=-8+9+4\Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=5.$$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ (3,2) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.
β) i. Αρχικά θα δείξουμε ότι τα Α, Β είναι σημεία του κύκλου.
Το Α βρίσκεται στον κύκλο όταν $(4-3)^2+(4-2)^2=5\Leftrightarrow 1+4=5$ ισχύει
Το Β βρίσκεται στον κύκλο όταν $(2-3)^2+(0-2)^2=5\Leftrightarrow 1+4=5$ ισχύει.
Στη συνέχεια, για να είναι διάμετρος η ΑΒ, πρέπει το Κ να είναι μέσο του ΑΒ.
Είναι $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{4+2}{2}=3=x_K$ και $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4+0}{2}=2=y_K$. Άρα τα Α, Β είναι αντιδιαμετρικά.
ii. Οι ευθείες που είναι παράλληλες στην ΑΒ έχουν εξίσωση της μορφής
ε: $y=\lambda_{AB}x+\beta\Leftrightarrow y=\frac{0-4}{2-4}x+\beta\Leftrightarrow 2x-y+\beta=0$.
Η ε εφάπτεται του κύκλου όταν

$$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|2\cdot3-1\cdot2+\beta|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow$$
$$\frac{|4+\beta|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow|4+\beta|=5\Leftrightarrow\beta+4=\pm5\Leftrightarrow$$
$$(\beta+4=5\Leftrightarrow\beta=1)\text{ ή }(\beta+4=-5\Leftrightarrow\beta=-9).$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξίσωση $y=2x+1$ ή $y=2x-9$.
γ) Παρατηρούμε ότι $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}=2\rho$, άρα η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε διέρχεται από το κέντρο Κ και ισχύει:

$$2=\lambda\cdot3+4\Leftrightarrow-2=3\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\frac{2}{3}.$$

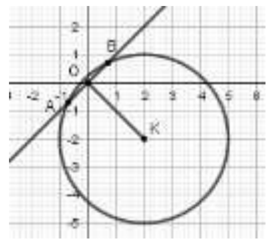
18467.α)

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=2\left(x+3\right)\Leftrightarrow x^2-2x+1+\left(y+2\right)^2=2x+6\Leftrightarrow$$

$$x^2-4x+\left(y+2\right)^2=5\Leftrightarrow x^2-4x+4+\left(y+2\right)^2=5+4\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y+2\right)^2=9.$$

Η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(2,-2\right)$ και ακτίνα $\rho=3$.

β) Είναι $\left(KO\right)=\sqrt{\left(0-2\right)^2+\left(0+2\right)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}<3$ άρα η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.



γ) Επειδή το Ο είναι μέσο της χορδής ΑΒ, η ΟΚ είναι απόστημα της χορδής.

Είναι $\lambda_{OK}=\dfrac{-2}{2}=-1$ και

$OK\perp AB\Leftrightarrow\lambda_{OK}\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\lambda_{AB}=1$, οπότε η ευθεία ΑΒ είναι η y = x.

δ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε:

$$AO^2=AK^2-OK^2=3^2-\left(\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2}\right)^2=9-8=1\Leftrightarrow$$

$$AO=1\Leftrightarrow AB=2AO=2.$$

$$\left(KAB\right)=\frac{1}{2}\left(AB\right)\left(KO\right)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

18521.α) $\lambda_{AB}=\dfrac{4-2}{2-1}=2$, $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{1-2}{3-1}=-\dfrac{1}{2}$. Είναι

$$\lambda_{AB}\lambda_{A\Gamma}=-1\Leftrightarrow AB\perp A\Gamma\Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma=90^\circ.$$

β) Επειδή $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$, ο ζητούμενος κύκλος έχει διάμετρο τη ΒΓ, οπότε το κέντρο του είναι το μέσο Μ της ΒΓ. Είναι

$$x_M=\frac{x_\Gamma+x_B}{2}=\frac{5}{2},\ y_M=\frac{y_\Gamma+y_B}{2}=\frac{5}{2},\text{ άρα } M\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right).$$

Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι $\rho=\dfrac{\left(B\Gamma\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{\left(3-2\right)^2+\left(4-1\right)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$, οπότε έχει εξίσωση $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

γ) Οι ευθείες ε που διέρχονται από την αρχή των αξόνων έχουν εξίσωση της μορφής y = λx ή x = 0.

Για να είναι ο y΄y δηλαδή η ευθεία x = 0 εφαπτομένη του C πρέπει $d(M,\varepsilon)=\rho$.

Είναι $d(M,\varepsilon)=\frac{5}{2}\neq\rho$, οπότε ο άξονας y΄y δεν εφάπτεται του κύκλου.

Αν ε: $y=\lambda x \Leftrightarrow \lambda x-y=0$, τότε

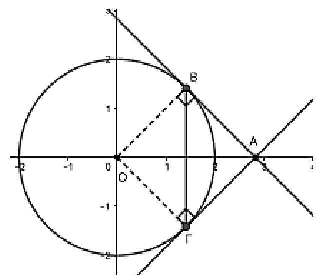
$$d(M,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda\cdot\frac{5}{2}-1\cdot\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow \frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{|\lambda-1|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{\cancel{2}}\Leftrightarrow$$

$$25(\lambda-1)^2=10(\lambda^2+1)\Leftrightarrow 25\lambda^2-50\lambda+25=10\lambda^2+10\Leftrightarrow$$

$$15\lambda^2-50\lambda+15=0\Leftrightarrow 3\lambda^2-10\lambda+3=0\Leftrightarrow$$

$\lambda=3$ ή $\lambda=\frac{1}{3}$. Άρα ε: $y=3x$ ή $y=\frac{1}{3}x$.

18567.α) i. Ο κύκλος C έχει κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ = 2.



Είναι $(OA)=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+0^2}=2\sqrt{2}>2=\rho$,

οπότε το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το A και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ, έχουν εξίσωση:

ε: $y=\lambda\left(x-2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \lambda x-y-2\lambda\sqrt{2}=0$.

Η ε εφάπτεται του κύκλου όταν

$$d(O,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{\left|\lambda\cdot 0-0-2\lambda\sqrt{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow \cancel{2}\lambda\sqrt{2}=\cancel{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$$

Οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι οι ευθείες

$\varepsilon_1: x-y-2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow y=x-2\sqrt{2}$ και

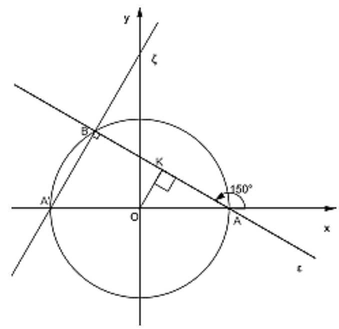
$\varepsilon_2: -x-y+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow y=-x+2\sqrt{2}$.

Οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$.

Είναι $\lambda_1\lambda_2=-1\Leftrightarrow\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ = 2 ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2.
Συνεπώς $(\text{ΑΒΟΓ}) = 2^2 = 4$.

18569.α) i. Τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox΄ έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως, για y=0 έχουμε:
$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, άρα $A'(-1,0)$ και $A(1,0)$.
ii. Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης



$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150^\circ = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - 30^\circ\right) = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$, οπότε έχει εξίσωση:

$$y - 0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

β) i. Αν ΟΚ το απόστημα της χορδής ΑΒ, τότε

$$(\text{OK}) = d(O,\varepsilon) = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0 + 0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

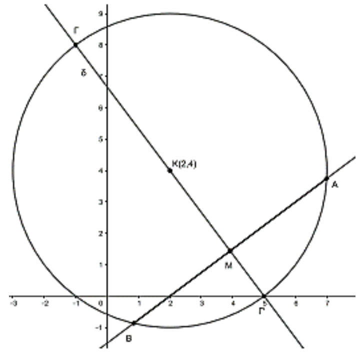
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ έχουμε:

$$(\text{KA})^2 = (\text{OA})^2 - (\text{OK})^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (\text{KA}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επειδή το Κ είναι μέσο της χορδής ΑΒ, ισχύει ότι $(\text{AB}) = 2(\text{KA}) = \sqrt{3}$.
γ) Η γωνία Α΄ΒΑ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα Α΄Β⊥ΒΑ δηλαδή ζ⊥ε ,οπότε

$$\lambda_\varepsilon \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}\lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

Η ευθεία ζ έχει εξίσωση $y - 0 = \sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.



18570.α) $x^2+y^2-4x-8y-5=0 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2-8y+16=4+16+5 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-4)^2=25$.

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο K(2,4) και η ακτίνα του είναι ρ=5.

β) i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή $d(K,\varepsilon)<\rho \Leftrightarrow$

$$\frac{|3\cdot 2-4\cdot 4-\mu|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}<5 \Leftrightarrow \frac{|-10-\mu|}{5}<5 \Leftrightarrow |\mu+10|<25 \Leftrightarrow$$

$$-25<\mu+10<25 \Leftrightarrow -35<\mu<15.$$

ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου Κ θα επαληθεύουν την εξίσωση της. Δηλαδή $3\cdot 2-4\cdot 4=\mu \Leftrightarrow \mu=-10$ δεκτή.

iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓΑΒ με βάση τη χορδή ΑΒ. Άρα το Γ ανήκει στη μεσοκάθετη ευθεία (δ) της χορδής ΑΒ που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής ΑΒ και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε, με $\lambda_\varepsilon=\frac{3}{4}$.

Είναι $\delta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=-\frac{4}{3}$ και η ευθεία δ έχει εξίσωση:

$$y-4=-\frac{4}{3}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}=-\frac{4}{3}(x-5).$$

Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία.

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-4)^2=25\\ y=-\frac{4}{3}(x-5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+\left(-\frac{4}{3}(x-5)-4\right)^2=25\ (1)\\ y=-\frac{4}{3}(x-5)\ (2)\end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{-4x+20-12}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{-4x+8}{3}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(\frac{4}{3}(x-2)\right)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + \frac{16}{9}(x-2)^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$9(x-2)^2 + 16(x-2)^2 = 225 \Leftrightarrow 25(x-2)^2 = 225 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x-2 = \pm 3 \Leftrightarrow (x-2=3 \Leftrightarrow x=5) \text{ ή } (x-2=-3 \Leftrightarrow x=-1)$$

Αν x = 5 τότε $(2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}(5-5) = 0$ και αν x = - 1 τότε

$y = -\frac{4}{3}(-1-5) = 8$.

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ΄(-1,8).

18745.α) Το έντομο κινείται πάνω στη διακεντρική ευθεία των 4 κύκλων , η οποία είναι οριζόντια και διέρχεται από το σημείο Β(0,1) άρα είναι η $y=1$.

β) i.Έστω $C_1(A, \rho_1 = 3), C_2(B, \rho_2 = 2), C_3(\Gamma, \rho_3 = 1)$ και $C_4\left(\Delta, \rho_4 = \frac{1}{2}\right)$ οι

τέσσερις κύκλοι.

Είναι :

- $$d(A, \varepsilon_1) = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-2) - 1\cdot 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 + \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{3}{9}+1}} \Leftrightarrow$$

$$d(A, \varepsilon_1) = \frac{\left|\frac{-2\sqrt{3} - \cancel{3} + \cancel{3} - 4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}} \Leftrightarrow d(A, \varepsilon_1) = \frac{\left|\frac{-6\sqrt{3}}{3}\right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{6\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}{\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}} = \frac{6}{2} = 3 = \rho_1 .$$

- $$d(B,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0-1\cdot 1+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{\left|-1+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{3}{9}+1}}\Leftrightarrow$$

$$d(B,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{-\cancel{3}+\cancel{3}-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\Leftrightarrow d(B,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{4\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}{\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}=\frac{4}{2}=2=\rho_2\,.$$

- $$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2-1\cdot 1+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}-1+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{3}{9}+1}}\Leftrightarrow$$

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{2\sqrt{3}-\cancel{3}+\cancel{3}-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\Leftrightarrow d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}{\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}=\frac{2}{2}=1=\rho_3\,.$$

- $$d(\Delta,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3-1\cdot 1+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{3\sqrt{3}}{3}-1+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{3}{9}+1}}\Leftrightarrow$$

$$d(\Delta,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{3\sqrt{3}-\cancel{3}+\cancel{3}-4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\Leftrightarrow d(\Delta,\varepsilon_1)=\frac{\left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right|}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}{\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}}=\frac{1}{2}=\rho_4\,.$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1):\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

ii. Η (ε_1) σχηματίζει με τον άξονα x΄x άρα και με την $y=1$ γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε $\omega=30^\circ$

Η άλλη κοινή εφαπτομένη (ε_2) είναι συμμετρική της (ε_1) ως την ευθεία $y=1$

άρα σχηματίζει γωνία $\theta = 150^\circ$ με την ευθεία $y = 1$ άρα και τον άξονα x΄x.

Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Έστω $(\varepsilon_2): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \beta$. Η (ε_2) διέρχεται από το σημείο Μ(4,1) οπότε

$$1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα $(\varepsilon_2): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3+\sqrt{3}}{3}$.

γ) Οι εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) και η ευθεία της διακέντρου διέρχονται από το σημείο Μ , άρα η τελική θέση του εντόμου είναι το Μ(4,1) .

18781. α) i. $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 - 5 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2 + y^2 = 4$.

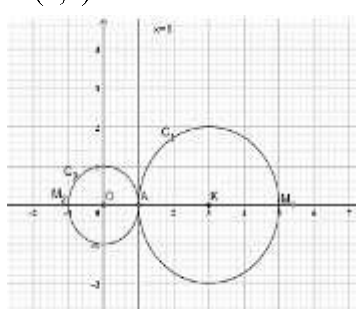
ii. Ο C_1 έχει κέντρο K(3,0) και ακτίνα $\rho_1 = 2$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

Είναι $(OK) = 3 = \rho_1 + \rho_2$ οπότε οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

β) i. Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$,
$x^2 + y^2 = 1$, προκύπτει:

$-6x + 5 = -1 \Leftrightarrow -6x = -6 \Leftrightarrow x = 1$ και $1^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$,

επομένως οι κύκλοι εφάπτονται στο σημείο Α(1,0).



ii. Η διακεντρική ευθεία ΟΚ είναι ο άξονας x΄x και η εφαπτομένη των κύκλων στο Α είναι κάθετη στη διακεντρική ευθεία, άρα έχει εξίσωση $x = 1$.

γ) Επειδή οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, η μέγιστη απόσταση των σημείων M_1, M_2 των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα είναι:

$$(M_1M_2)_{max} = (M_2A) + (AM_1) = 2\rho_2 + 2\rho_1 = 2 + 4 = 6.$$

18871.α) (C): $x^2+y^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=5$

Είναι $(OA)=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}>\rho$ άρα το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.

β) i. Έστω ότι οι εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το A έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε
η εξίσωσή τους είναι της μορφής: ε:

$$y-1=\lambda(x-3)\Leftrightarrow y-1=\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow -\lambda x+y+3\lambda-1=0$$

Η ε εφάπτεται του (C) αν και μόνο αν

$$d(0,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|-\lambda\cdot 0+0+3\lambda-1|}{\sqrt{(-\lambda)^2+1^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow |3\lambda-1|=\sqrt{5}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$$

$$(3\lambda-1)^2=5\left(\lambda^2+1\right)\Leftrightarrow 9\lambda^2-6\lambda+1=5\lambda^2+5\Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2-6\lambda-4=0\Leftrightarrow 2\lambda^2-3\lambda-2=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ=25 και ρίζες $\lambda=2$ ή $\lambda=-\frac{1}{2}$,

οπότε οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι (ε_1):

$-2x+y+6-1=0\Leftrightarrow 2x-y=5$ και

(ε_2): $\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}-1=0\Leftrightarrow x+2y-3-2=0\Leftrightarrow x+2y=5$.

ii. Από το σύστημα των (C), (ε_1), έχουμε:

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ y=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(2x+5)^2=5\\ y=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x^2+20x+25-5=0\\ y=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}5x^2+20x+20=0\\ y=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+4=0\\ y=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2)^2=0\\ y=2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-4+5=1\end{cases}$$, άρα

B(- 2, 1).

Από το σύστημα των (C), (ε_2), έχουμε:

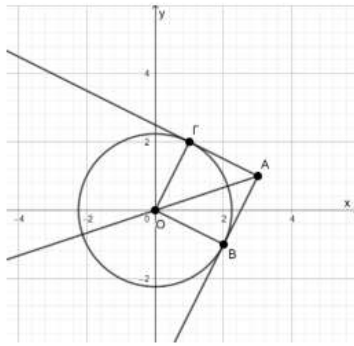
$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\ x=-2y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(5-2y)^2+y^2=5\\ x=-2y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25-20y+4y^2+y^2-5=0\\ x=-2y+5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}5y^2-20y+20=0\\ x=-2y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-4y+4=0\\ x=-2y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-2)^2=0\\ x=-2y+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ x=-4+5=1\end{cases}$$ άρα

Γ(1 , 2).

,

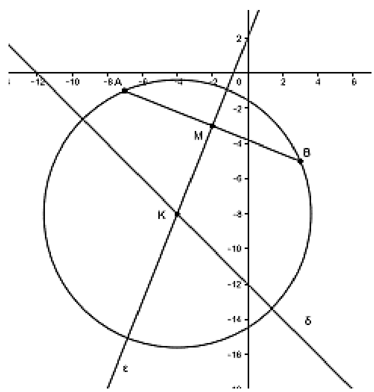
Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας των εφαπτομένων, οπότε η διχοτόμος γωνίας $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι η ευθεία ΟΑ. Είναι $\lambda_{OA} = \frac{1}{3}$ και ΟΑ: $y = \frac{1}{3}x$.



20091.α) i. $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-7+3}{2} = -2$,

$y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$,

άρα $M(-2,-3)$.



ii. Είναι $\lambda_{AB} = \dfrac{-5+1}{3+7} = -\dfrac{2}{5}$ και

$KM \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{AB}\lambda_{KM} = -1 \Leftrightarrow$

$-\dfrac{2}{5}\lambda_{KM} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KM} = \dfrac{5}{2}$.

Η ΚΜ έχει εξίσωση: $y+3 = \dfrac{5}{2}(x+2) \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{2}x + 2$.

β) i. Το κέντρο Κ του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία ΚΜ. Άρα η τομή των δύο ευθειών, δηλαδή η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους, θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου Κ.

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{2}x + 2 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{2}x + 2 \\ x + \dfrac{5}{2}x + 2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{2}x + 2 \\ 2x + 5x + 4 = -24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{2}x + 2 \\ 7x = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{2}(-4) + 2 = -8 \\ x = -4 \end{cases} \text{ άρα } K(-4,-8).$$

ii. Αρκεί να βρούμε την ακτίνα του κύκλου που είναι το μήκος του τμήματος ΚΑ.

$\rho = (\mathrm{KA}) = \sqrt{(-4+7)^2 + (-8+1)^2} = \sqrt{58}$. Η εξίσωση του κύκλου είναι C:

$(x+4)^2 + (y+8)^2 = 58$.

20229.α) Είναι

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda+8)^2 + \lambda^2 - 4\cdot 7 = \lambda^2 + 16\lambda + 64 + \lambda^2 - 28 =$

$2\lambda^2 + 16\lambda + 36 = 2(\lambda^2 + 8\lambda + 18) > 0$ γιατί το τριώνυμο $\lambda^2 + 8\lambda + 18$ έχει Δ = - 8 < 0, οπότε η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \equiv \left(\frac{\lambda+8}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 + 8\lambda + 18)}}{2}$.

β) Είναι $x_K = \frac{\lambda+8}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2x_K - 8$ και $y_K = -\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = -2y_K$, άρα

$2x_K - 8 = -2y_K \Leftrightarrow x_K + y_K - 4 = 0$.

Οι συντεταγμένες του Κ επαληθεύουν την εξίσωση $x + y - 4 = 0$, οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία ε: $x + y - 4 = 0$.

γ) Για $\lambda = -8$ είναι $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$ (1) και για λ = 0 είναι

$x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ (2)

Αφαιρώντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $-8y + 8x = 0 \Leftrightarrow y = x$, τότε η (2) γίνεται:

$x^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.Δύο από τους κύκλους διέρχονται από τα σημεία $\Gamma\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και

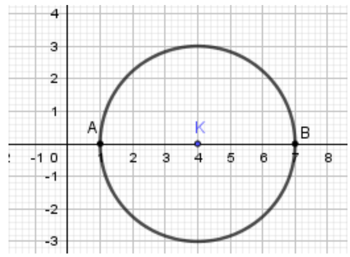
$\Delta\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Για να διέρχονται όλοι οι κύκλοι από τα σημεία αυτά πρέπει:

$\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (\lambda+8)\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 7 = 0 \Leftrightarrow$ ....ισχύει

και

$$\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-(\lambda+8)\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\lambda\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+7=0\Leftrightarrow \text{....ισχύει}$$

δ) Για $\lambda = 0$ είναι $x^2+y^2-8x+7=0\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=9$, ο κύκλος έχει κέντρο Κ(4,0) και ακτίνα $\rho = 3$. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην ΟΚ. Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Ο(0, 0), είναι το Α(1, 0) και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το Β(7, 0).



20650.α) i. Είναι $\lambda_1=\lambda_2=1\Leftrightarrow \varepsilon_1//\varepsilon_2$.

ii. $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=0,\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=0$, άρα Μ(0,0).

iii. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη διέρχεται από το Ο και είναι παράλληλη στις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, οπότε έχει εξίσωση $y=x$.

β) i. Επειδή το Κ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 βρίσκεται στη μεσοπαράλληλό τους. Επειδή επιπλέον ανήκει στην ευθεία $(\eta): x=\lambda$, έχει $y=x=\lambda$, οπότε Κ(λ, λ).

ii. $\varepsilon_1: y=x+2\Leftrightarrow -x+y-2=0$.

Είναι $\rho=d(K,\varepsilon_1)=\dfrac{|-\lambda+\lambda+2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ και είναι ανεξάρτητη του λ.

Οι ζητούμενοι κύκλοι έχουν εξίσωση: $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=2$.

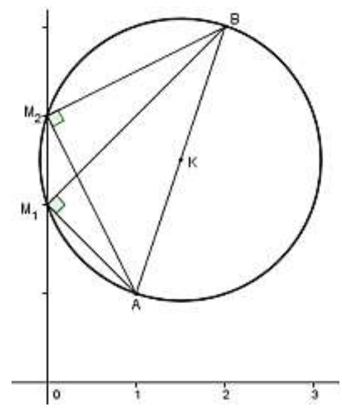
20651.α) Έστω Μ(0, y) με $y \in \mathbb{R}$, τότε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΒ, αν και μόνο αν

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (0-1, y-1) \cdot (2-0, 4-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2 + (y-1)(4-y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2 + 4y - y^2 - 4 + y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 5y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ή } y = 3.$$

Άρα το Μ έχει συντεταγμένες (0, 2) ή (0, 3).



β) Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΒ έχει κέντρο το μέσο Κ της ΑΒ.

Είναι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}$, $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5}{2}$, άρα $K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι ίση με

$$\rho = \frac{1}{2}(AB) = \frac{1}{2}\sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10},$$

οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση C:

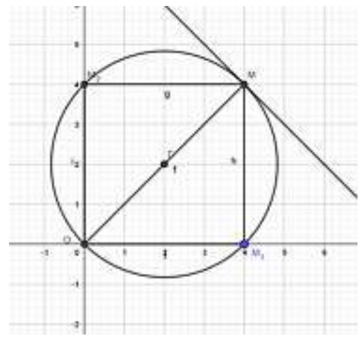
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

γ) Αν Μ(0, 2) τότε $\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ ισχύει.

Αν Μ(0, 3) τότε $\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ ισχύει.

Γεωμετρικά, η γωνία $\widehat{AMB}$ είναι ορθή, οπότε είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο με διάμετρο την ΑΒ.

20700.α) Το κέντρο Κ του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, το οποίο είναι και κοινό μέσο των διαγωνίων.
Η ΟΜ είναι διαγώνιος του τετραγώνου και το μέσο της Κ έχει συντεταγμένες



$$x_K = \frac{x_O + x_M}{2} = 2,\ y_K = \frac{y_O + y_M}{2} = 2,$$

άρα Κ(2,2). Η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος $\rho = (OK) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση C: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$.

β) Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C, αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon) = \rho$.

Είναι $d(K,\varepsilon) = \dfrac{|2+2-8|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} = \rho$, οπότε η ε εφάπτεται του C.

γ) Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των ε, C είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.

Είναι $\begin{cases} x+y=8 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8-x \\ (x-2)^2 + (8-x-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 8-x \\ (x-2)^2 + (6-x)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 8-x \\ x^2 - 4x + 4 + 36 - 12x + x^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8-x \\ 2x^2 - 16x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 8-x \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8-x \\ (x-4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8-4 = 4 \\ x = 4 \end{cases}$, άρα το κοινό τους σημείο είναι το Μ(4,4).

20863.α) Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ΑΒ, τότε

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 0$, άρα Μ(2,0).

Επειδή τα σημεία Α, Β βρίσκονται στον άξονα x΄x, η μεσοκάθετη του ΑΒ είναι η (ζ): x = 2.

β) Επειδή το Κ είναι σημείο της (ζ) οι συντεταγμένες του θα είναι της μορφής (2, λ), $\lambda \in \mathbb{R}$.

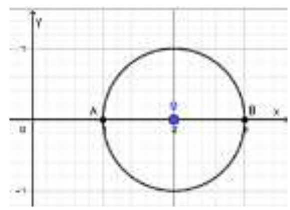
Η ακτίνα του κύκλου (c) είναι

$\rho = (KB) = (KA) = \sqrt{(2-1)^2 + (\lambda - 0)^2} = \sqrt{1+\lambda^2}$, οπότε

η εξίσωσή τους είναι η $(x-2)^2 + (y-\lambda)^2 = 1+\lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

γ) i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το Μ(2,0), άρα λ = 0 και η εξίσωσή του είναι

$(x-2)^2 + y^2 = 1$.



ii. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(K,\varepsilon) = \rho$.

Είναι

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|1\cdot 2 + \lambda\cdot\lambda - 1|}{\sqrt{1^2+\lambda^2}} = \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\left(\sqrt{1+\lambda^2}\right)^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} = \sqrt{1+\lambda^2} = \rho.$$

21154.α) Είναι

$x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 + y^2 - 4\alpha y + 4\alpha^2 = 8\alpha^2 \Leftrightarrow$

$(x-2\alpha)^2 + (y-2\alpha)^2 = 8\alpha^2$.

Η (1) είναι εξίσωση κύκλου όταν $8\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

β) Ο κύκλος έχει κέντρο Κ(2α,2α) και ακτίνα $R = \sqrt{8\alpha^2} = 2|\alpha|\sqrt{2}$.

γ) Είναι $x_K = 2\alpha = y_K$, $\alpha \neq 0$. Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία y = x με εξαίρεση το σημείο Ο(0,0), αφού είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα x΄x, θα πρέπει να ισχύει:

$|y_K| = R \Leftrightarrow |2\alpha| = 2|\alpha|\sqrt{2} \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = \sqrt{2}$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα x΄x.

21159.α) Οι κύκλοι με διάμετρο την ΑΒ έχουν κέντρο το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ.

Είναι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha}{2}$, $y_B = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\beta}{2}$, άρα $K\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = \frac{(AB)}{2} = \frac{\sqrt{(0-\alpha)^2 + (\beta - 0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$,

οπότε η εξίσωση του είναι:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + y^2 - 2y \cdot \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x + y^2 - \beta y + \cancel{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} = \cancel{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} \overset{\beta = 10 - \alpha}{\Leftrightarrow} x^2 - \alpha x + y^2 - (10 - \alpha) y = 0 .$$

β) Για α = 1 έχουμε τον κύκλο C_1 : $x^2 + y^2 - x - 9y = 0 \ (1)$.

Για α = 9 έχουμε τον κύκλο C_2: $x^2 + y^2 - 9x - y = 0 \ (2)$.

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:
$8x - 8y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2 + x^2 - 9x - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$$

Για x = 0 έχουμε y = 0 και για x = 5 έχουμε y = 5, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Ο (0,0) και P(5,5).
Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο P(5,5) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2 - \alpha x + y^2 - (10 - \alpha) y = 0$.

Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές x = 5 και y = 5 έχουμε
$5^2 - \alpha \cdot 5 + 5^2 - (10 - \alpha) \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow$

$25 - 5\alpha + 25 - 50 + 10\alpha = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει και αντικαθιστώντας τις τιμές x = 0 και y = 0 έχουμε $0^2 - \alpha \cdot 0 + 0^2 - (10 - \alpha) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει.

γ) Είναι $\begin{cases} x_M = \dfrac{\alpha}{2} \\ y_M = \dfrac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_M = \alpha \\ 2y_M = \beta \\ \alpha + \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow 2x_M + 2y_M = 10 \Leftrightarrow x_M + y_M = 5$.

Επειδή οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $x + y = 5$, το Μ βρίσκεται επι της ευθείας αυτής.
Είναι $\beta > 0 \Leftrightarrow 2y > 0 \Leftrightarrow y > 0$ και

$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta = 10 - \alpha > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \alpha < 10 \Leftrightarrow 0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$.

Η ευθεία $x + y = 5$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(5,0) και Β(0,5).
Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την ΑΒ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που ορίζεται από την ευθεία x + y = 5 με x > 0 και y > 0 εκτός από τα άκρα του Α(5,0) και Β(0,5).

21276.α) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $x_A = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = x_A + 1$ και
$y_A = 2\lambda - 1 = 2(x_A + 1) + 1 \Leftrightarrow y_A = 2x_A + 3$.
Επειδή οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση $y = 2x + 3$, η γραμμή γ_1 είναι ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

Είναι $\lambda_{\gamma_2} = \lambda_{\text{ü}} = \dfrac{3}{-1} = -3$, άρα

$\gamma_2 : y - 2 = -3(x + 4) \Leftrightarrow y = -3x - 10 \Leftrightarrow 3x + y + 10 = 0$.

β) $d(K, \gamma_1) = \dfrac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ και

$d(K, \gamma_2) = \dfrac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.

Επειδή $\dfrac{4\sqrt{5}}{5} < \dfrac{7\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow d(K, \gamma_1) < d(K, \gamma_2)$ προφανώς συμφέρει η σύνδεση του σταδίου με τη γραμμή γ_1.

γ) Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου που ορίζει το κυκλικό πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο Κ(1, 1). Εφόσον ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1, η ακτίνα του λόγω του ερωτήματος (β), είναι

$\rho = d(K, \gamma_1) = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, οπότε

C: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{16}{5}$.

21349.α) i. Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 81 + 9 - 40 = 50 > 0$, οπότε ο κύκλος (C) έχει κέντρο $K\left(-\dfrac{-9}{2}, -\dfrac{-3}{2}\right)$ ή $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{50}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

ii. Η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) είναι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{\left|4 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 10\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\frac{25}{2}}{5} = \frac{5}{2} < \frac{5\sqrt{2}}{2} = \rho .$$

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία A και B.

iii. $\begin{cases} 4x + 3y - 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y = \dfrac{10 - 4x}{3} \ (3) \\ x^2 + \left(\dfrac{10 - 4x}{3}\right)^2 - 9x - 3\dfrac{10 - 4x}{3} + 10 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{100 - 80x + 16x^2}{9} - 9x - 10 + 4x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{100 - 80x + 16x^2}{9} - 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$9x^2 + 100 - 80x + 16x^2 - 45x = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 125x + 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ $x = 1$ ή $x = 4$.

Για x = 1 είναι y = 2. Για x = 4 είναι y = −2.
Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ε) και του κύκλου (C) είναι A(1,2) και B(4, −2).

β) i. Είναι: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (1,2) \cdot (4,-2) = 4 - 4 = 0$.

ii. Επειδή $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ η γωνία AOB είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB. Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O.

21683.α) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι (ε): $x x_1 + y y_1 = 4$ και για $x=0$ είναι $y=\dfrac{4}{y_1}$ ($y_1 \neq 0$) ενώ για $y=0$ είναι $x=\dfrac{4}{x_1}$. Άρα η (ε) τέμνει τον άξονα y΄y στο $\Lambda\left(0,\dfrac{4}{y_1}\right)$ και τον άξονα x΄x στο $K\left(\dfrac{4}{x_1},0\right)$.

β) $d=(K\Lambda)=\sqrt{\dfrac{16}{x_1^2}+\dfrac{16}{y_1^2}}=\sqrt{\dfrac{16x_1^2+16y_1^2}{x_1^2y_1^2}} \Leftrightarrow$

$$d=\sqrt{\frac{16\left(x_1^2+y_1^2\right)}{\left(x_1y_1\right)^2}}=\frac{4\sqrt{4}}{|x_1y_1|}\overset{x_1y_1>0}{=}\frac{8}{x_1y_1}$$ γιατί $x_1^2+y_1^2=4$.

γ) Όταν $x_1=\sqrt{2}$ τότε $x_1^2+y_1^2=4 \Leftrightarrow y_1^2=2 \overset{y_1>0}{\Leftrightarrow} y_1=\sqrt{2}$ άρα

$$d_o=(K\Lambda)=\frac{8}{\sqrt{2}^2}=4.$$

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$d \geq d_o \Leftrightarrow \frac{8}{x_1y_1} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x_1y_1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2+y_1^2}{x_1y_1} \geq 2 \overset{x_1y_1>0}{\Leftrightarrow} x_1^2+y_1^2 \geq 2x_1y_1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_1^2-2x_1y_1+y_1^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x_1-y_1\right)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

21696.α) $x^2+y^2-2x+4y=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=5 \Leftrightarrow$ $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(1,-2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β) 1ος τρόπος: Θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=5\\ x-2y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x+4y=0\\ x-2y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2(x-2y)=0\\ x-2y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+6=0\\ x-2y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=-6\\ x-2y=-3\end{cases}$$ είναι

αδύνατο αφού $x^2+y^2 \geq 0$ άρα δεν έχουν κοινά σημεία.

2ος τρόπος: Υπολογίζουμε την απόσταση της (ε) από το κέντρο του κύκλου και είναι $d(K,\varepsilon)=\dfrac{|1+4+3|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}>\sqrt{5}=\rho$ (πράγματι

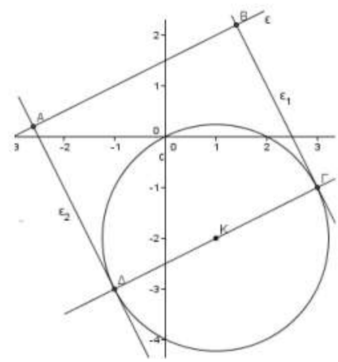
$\frac{8\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} \Leftrightarrow 8\sqrt{5} > 5\sqrt{5}$ ισχύει) άρα η (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

γ) Είναι $(\varepsilon): x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ άρα $\lambda_\varepsilon = \frac{1}{2}$ επομένως $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -2$.

Οι ε_1, ε_2 έχουν εξίσωση της μορφής $y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$ με $\beta \in \mathbb{R}$ και απέχουν από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα (αφού είναι εφαπτομένες).

Άρα $d(K, \varepsilon_1) = \frac{|2 - 2 - \beta|}{\sqrt{1+4}} \Leftrightarrow$

$\sqrt{5} = \frac{|-\beta|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |\beta| = 5 \Leftrightarrow \beta = \pm 5$.



Άρα είναι $\varepsilon_1 : 2x + y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 5 = 0$.

δ) Στην ε_1 για $x = 0$ είναι $y = 5$ άρα ένα σημείο της είναι το $A(0,5)$.

Αφού $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ τότε

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(A, \varepsilon_2) = \frac{|2 \cdot 0 + 5 + 5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = 2\rho .$$

Επειδή η (ε) δεν τέμνει τον κύκλο και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες στην (ε) και εφάπτονται στο κύκλο έστω στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τότε η ΓΔ είναι παράλληλη στην (ε). Επίσης ΚΓ θα είναι παράλληλη στην (ε) αφού ΚΓ ακτίνα άρα κάθετη στην ε_1 και ομοίως ΚΔ παράλληλη στην (ε). Επειδή από το Κ διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την (ε) τότε η ΓΔ θα είναι διάμετρος άρα θα ισούται με 2ρ.

22061.α) i) Αφού Μ μέσο ΔΓ τότε $M\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$. Άρα

$\lambda_{AM} = \frac{\frac{\alpha}{2} - \alpha}{\alpha - 0} = \frac{-\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = -\frac{1}{2}$ και η ΑΜ έχει εξίσωση

$y - \alpha = -\frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \alpha$

ii) Επειδή $BN \perp AM$ τότε $\lambda_{BN} \cdot \lambda_{AM} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BN} = 2$ άρα η BN έχει εξίσωση $y - 0 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x$.

β) Το σημείο N είναι το σημείο τομής των BN και AN άρα λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + \alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -x + 2\alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2\alpha \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\alpha}{5} \\ y = \dfrac{4\alpha}{5} \end{cases}$$ άρα

$N\left(\frac{2\alpha}{5}, \frac{4\alpha}{5}\right)$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $(N\Gamma) = \alpha$.

Πράγματι είναι $(N\Gamma) = \sqrt{\left(\alpha - \frac{2\alpha}{5}\right)^2 + \left(\frac{4\alpha}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\alpha}{5}\right)^2 + \frac{16\alpha^2}{25}} \Leftrightarrow$

$(N\Gamma) = \sqrt{\frac{9\alpha^2}{25} + \frac{16\alpha^2}{25}} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha$.

Η εξίσωση του κύκλου είναι $(x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$.

22062.α) Κάθε κύκλος C_λ έχει κέντρο $K(\lambda, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = |\lambda|$ με $\lambda \neq 0$.

β) Επειδή το σημείο K επαληθεύει την εξίσωση $y = x$ (Πράγματι $\lambda = \lambda$) τότε ανήκει στην ευθεία.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $d(y'y, K) = \rho$ πράγματι είναι

$d(y'y, K) = \frac{|\lambda + 0 \cdot \lambda + 0|}{\sqrt{1 + 0}} = |\lambda|$.

Ομοίως για την $y = 0$ είναι $d(x'x, K) = \frac{|0 \cdot \lambda + \lambda + 0|}{\sqrt{0 + 1}} = |\lambda| = \rho$.

δ) Η $(\eta): x = \alpha$ εφάπτεται σε κύκλο C_λ αν και μόνον αν

$d(\eta, K) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda + 0 \cdot \lambda - \alpha|}{\sqrt{1 + 0}} = |\lambda| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\lambda-\alpha|=|\lambda| \Leftrightarrow (\lambda-\alpha=\lambda \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ αδύνατο}) \text{ ή } \left(\lambda-\alpha=-\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{\alpha}{2}\right)$$

Άρα εφάπτεται σε μοναδικό κύκλο τον $C:\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}$.

Ομοίως η $(\zeta): y=\alpha$ εφάπτεται σε κύκλο C_λ αν και μόνον αν

$$d(\zeta,K)=\rho \Leftrightarrow \frac{|0\cdot\lambda+\lambda-\alpha|}{\sqrt{0+1}}=|\lambda| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda-\alpha|=|\lambda| \Leftrightarrow (\lambda-\alpha=\lambda \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ αδύνατο}) \text{ ή } \left(\lambda-\alpha=-\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{\alpha}{2}\right)$$

Άρα εφάπτεται σε μοναδικό κύκλο τον $C:\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{4}$.

ε) Η $(\varepsilon): \alpha x+\beta y-1=0$ εφάπτεται σε κύκλο C_λ αν και μόνον αν

$$d(\varepsilon,K)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\alpha\lambda+\beta\lambda-1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=|\lambda| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(\alpha+\beta)\lambda-1|=|\lambda|\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow |(\alpha+\beta)\lambda-1|=\left|\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left((\alpha+\beta)\lambda-1=\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow \left(\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\lambda=1 \Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\lambda=\frac{1}{\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \text{ ή}$$

$$\Leftrightarrow \left((\alpha+\beta)\lambda-1=-\lambda\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow \left(\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\lambda=1 \Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\lambda=\frac{1}{\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \text{ αφού}$$

$$\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow$$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta=0$ αδύνατο αφού $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ και

ομοίως $\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow$

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta=0$ αδύνατο αφού $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$.

22066.α) Για το σημείο Α είναι $x=\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y=\eta\mu\theta$ άρα
$x^2+y^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ άρα το Α ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο $x^2+y^2=1$ που έχει κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ίση με 1.
Για το σημείο Β είναι $x=\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta$ και $y=\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta$ άρα

$$x^2+y^2=\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\right)^2+\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x^2+y^2=2$$

άρα το Β ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=2$ που έχει κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ίση με $\sqrt{2}$.

β) $\overrightarrow{OA}=\left(\sigma\upsilon\nu\theta,\eta\mu\theta\right)$ και

$$\overrightarrow{AB}=\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta\ ,\ \eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\right)=\left(-\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu\theta\right).$$

Είναι $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta=0$ άρα $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$.

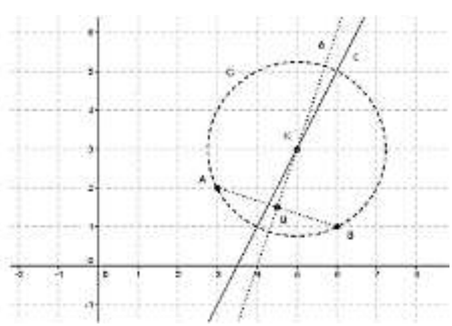
γ) 1ος τρόπος: Αφού $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$ τότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.
Επειδή $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}=1$ άρα το ΟΑΒ είναι και ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες επομένως η γωνία ω είναι 45 μοίρες.

ος τρόπος: Είναι $\overrightarrow{OB}=\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)$.
Είναι

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\right)+\eta\mu\theta\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}\cdot\sqrt{\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\right)^2+\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu^2\theta+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ άρα αφού η ω είναι οξεία γωνία είναι 45 μοίρες.

22069.α) Αν Μ είναι το μέσο της χορδής ΑΒ του κύκλου τότε το ΚΜ είναι απόστημα άρα αρκεί να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε με την μεσοκάθετη δ του ΑΒ. Είναι $M\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ και



$\lambda_{AB} = \dfrac{1-2}{6-3} = -\dfrac{1}{3}$ άρα αφού $AB \perp \delta$ τότε $\lambda_\delta \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = 3$.

Άρα η μεσοκάθετη δ έχει εξίσωση

$y - \dfrac{3}{2} = 3\left(x - \dfrac{9}{2}\right) \Leftrightarrow y = 3x - \dfrac{27}{2} + \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = 3x - \dfrac{24}{2} \Leftrightarrow y = 3x - 12$.

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases} y = 2x-7 \\ y = 3x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-12 = 2x-7 \\ y = 3x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ άρα το κέντρο του κύκλου είναι K(5,3).

β) $R = (AK) = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

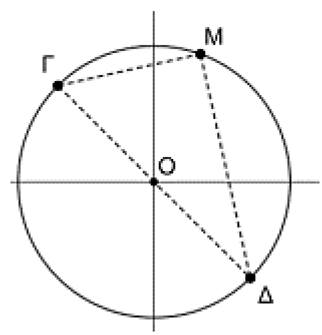
γ) $C: (x-5)^2 + (y-3)^2 = 5$.

22214.α) Είναι $\overrightarrow{AM} = (x+1, y)$, $\overrightarrow{BM} = (x-1, y)$ και $\overrightarrow{AB} = (1+1, 0) = (2,0)$

$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BM}\right|^2 = 9\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 = 9\sqrt{2^2 + 0^2} \Leftrightarrow$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = 18 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$.



β) i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2 = 32 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, οπότε ΓΔ= 2ρ, άρα τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο Ο του κύκλου.

ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου, τότε $\Gamma M\Delta = 90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Τότε όμως $\overrightarrow{M\Gamma} \perp \overrightarrow{M\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta} = 0$.

22223. α)

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\lambda,\lambda+1\right)+\left(3\lambda,\lambda-1\right)\right)=\frac{1}{2}\left(4\lambda,2\lambda\right)=\left(2\lambda,\lambda\right)$$

β) i. $B\hat{A}\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\Leftrightarrow$

$\lambda\cdot 3\lambda+\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-1\right)=0\Leftrightarrow 3\lambda^2+\lambda^2-1=0\Leftrightarrow$

$4\lambda^2=1\Leftrightarrow \lambda^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$.

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου Α, Β, Γ.

Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma=90^\circ$ η απέναντί πλευρά ΒΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου.

Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο Μ(x, y) της διαμέτρου ΒΓ.

Για $\lambda=\frac{1}{2}$ και $A\left(2,\frac{3}{2}\right)$ είναι

$$\overrightarrow{AM}=\left(2\cdot\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(1,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x_M-2,y_M-\frac{3}{2}\right)=\left(1,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}x_M-2=1\\ y_M-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=3\\ y_M=2\end{cases}$. Επομένως το κέντρο Μ είναι το (3,2).

Είναι $\rho=\left(AM\right)=\sqrt{\left(3-2\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$\left(x-3\right)^2+\left(y-2\right)^2=\frac{5}{4}$.

22239.α) i. $x^2+y^2=2^2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο Ο θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση 3x+4y = 25, δηλαδή $3\cdot 0+4\cdot 0=0\neq 25$ Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.

iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη ΟΑ από το κέντρο Ο προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1=-\frac{3}{4}$.

Είναι $\lambda_1\lambda_{OA}=-1\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\lambda_{OA}=-1\Leftrightarrow \lambda_{OA}=\frac{4}{3}$.

Η εξίσωση της ΑΟ θα είναι: $y-0=\frac{4}{3}\left(x-0\right)\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x$.

Το σημείο Α είναι το σημείο τομής της ΑΟ και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

$$\begin{cases} 3x+4y=25 \\ y=\frac{4}{3}x\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4\frac{4}{3}x=25 \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+16x=75 \\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x=75 \\ (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{4}{3}\cdot 3=4 \end{cases}.$$

Επομένως το σημείο Α είναι το (3,4).

β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου Ο από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή d(O, ε) = ρ.

$$d(O,\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot 0-0+\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |\lambda-2|=2\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda-2)^2=\left(2\sqrt{\lambda^2+1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-4\lambda+4=4\lambda^2+4 \Leftrightarrow 3\lambda^2+4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(3\lambda+4)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$$

απορρίπτεται ή $\lambda=-\frac{4}{3}$.

22264.α) Είναι

$$A^2+B^2-4\Gamma=\lambda^2+\lambda^2-4(\lambda-1)=2\lambda^2-4\lambda+4=2\left(\lambda^2-2\lambda+2\right).$$

Το τριώνυμο $\lambda^2-2\lambda+2$ έχει Δ = - 4< 0 οπότε $\lambda^2-2\lambda+2>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Το κέντρο Κ έχει συντεταγμένες $\left(-\frac{\lambda}{2},-\frac{\lambda}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{2\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}.$$

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας ε: x + y + 2 = 0, θα πρέπει d(K, ε) = ρ (2).

Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{\left|-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-\lambda+2|}{\sqrt{2}}$, οπότε η (2) γίνεται:

$$\frac{|-\lambda+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}\Leftrightarrow|-\lambda+2|=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}\Leftrightarrow$$

$$|-\lambda+2|=\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}\Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)^2=\left(\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}\right)^2\Leftrightarrow 4-4\lambda+\lambda^2=\lambda^2-2\lambda+2\Leftrightarrow$$

$$-2\lambda=-2\Leftrightarrow\lambda=1.$$

Για λ = 1, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ε είναι το $K\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και η ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για λ = 1, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο C:

$x^2+y^2+x+y=0$ που έχει κέντρο $K\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Από το M διέρχονται δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο C.

Οι ευθείες που διέρχονται από το M έχουν εξίσωση

ζ: $y+\frac{1}{2}=\lambda_1\left(x+\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow 2\lambda_1x-2y+3\lambda_1-1=0$ ή $x=-\frac{1}{2}$.

Αν ζ: $2\lambda_1x-2y+3\lambda_1-1=0$, τότε

$$d(K,\zeta)=\rho\Leftrightarrow\frac{\left|2\lambda_1\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\lambda_1-1\right|}{\sqrt{(2\lambda_1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{|-\lambda_1+1+3\lambda_1-1|}{\sqrt{4\lambda_1^2+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2|\lambda_1|}{\sqrt{4\left(\lambda_1^2+1\right)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{2|\lambda_1|}{2\sqrt{\lambda_1^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2|\lambda_1|=\sqrt{2}\sqrt{\lambda_1^2+1}\Leftrightarrow$$

$$4\lambda_1^2=2\lambda_1^2+2\Leftrightarrow 2\lambda_1^2=2\Leftrightarrow\lambda_1^2=1\Leftrightarrow\lambda_1=\pm1.$$

Για λ_1 = 1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η

ζ1: 2x – 2y +2 = 0 $\Leftrightarrow$ x – y +1 = 0.

Για λ_1 = -1 από την εξίσωση της ζ προκύπτει η ζ_2: -2x – 2y - 4 = 0 $\Leftrightarrow$ x + y +2 = 0.

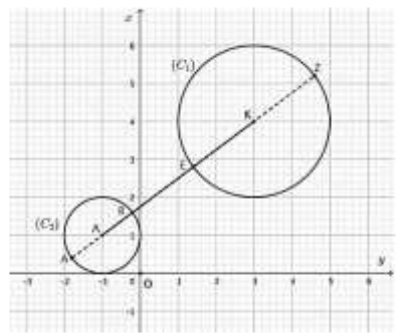
Οι ζ_1, ζ_2 είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο M.

22280.α) $(1) \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16=9+16-21 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$, οπότε ο κύκλος (1) έχει κέντρο K(3,4) και ακτίνα $\rho_1=2$.

$(2) \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=1 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=1$, οπότε ο κύκλος (2) έχει κέντρο $\Lambda(-1,1)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

β) Είναι $(K\Lambda)=\sqrt{(-1-3)^2+(1-4)^2}=5$ και $\rho_1+\rho_2=3$.

Επειδή $(K\Lambda)>\rho_1+\rho_2$ συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.



γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (K, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (K, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:
$(BE)=(K\Lambda)-(EK)-(\Lambda B)=(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2=2$.
Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (K, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:
$(AZ)=(K\Lambda)+(A\Lambda)+(KZ)=(K\Lambda)+\rho_1+\rho_2=8$.

22508.α) Το μέσο Κ του ευθυγράμμου τμήματος έχει συντεταγμένες
$x_K=\dfrac{x_A+x_\Gamma}{2}=2,\ y_K=\dfrac{y_A+y_\Gamma}{2}=2$, άρα
K(2,2). Έστω μ η μεσοκάθετος του ΑΓ. Είναι $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{0-4}{3-1}=-2$ και

$A\Gamma \perp M \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma}\lambda_\mu=-1 \Leftrightarrow -2\lambda_\mu=-1 \Leftrightarrow \lambda_\mu=\dfrac{1}{2}$, οπότε η μ έχει εξίσωση:

$y-2=\dfrac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+1$.

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου είναι το σημείο Κ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho=(AK)=\sqrt{(1-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου ΑΓ είναι
$(x-2)^2+(y-2)^2=5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές του τετραγώνου ισαπέχουν από τα σημεία Α, Γ και βλέπουν το ΑΓ υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος και του κύκλου διαμέτρου ΑΓ.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1 \\ (x-2)^2+\left(\frac{1}{2}x+1-2\right)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1\,(1) \\ (x-2)^2+\left(\frac{x-2}{2}\right)^2=5 \end{cases}.$$

$$(x-2)^2+\frac{(x-2)^2}{4}=5 \Leftrightarrow 4(x-2)^2+(x-2)^2=20 \Leftrightarrow$$

$$5(x-2)^2=20 \Leftrightarrow (x-2)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$x-2=\pm 2 \Leftrightarrow (x=0)\text{ ή }(x=4).$$

Για x = 0 είναι y = 1 και για x = 4 είναι y = 3, επομένως οι ζητούμενες κορυφές έχουν συντεταγμένες (4,3) και (0,1).

33696.α) Έστω $K(x_0,y_0)$ με $x_0>0,\ y_0>0$, τότε επειδή το Κ ανήκει στην ε, ισχύει ότι $y_0=2x_0-1$ (1).

Είναι $d(K,\zeta)=\rho \Leftrightarrow \frac{|x_0+y_0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |x_0+2x_0-1-2|=3\left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$|3x_0-3|=6 \Leftrightarrow 3|x_0-1|=6 \Leftrightarrow |x_0-1|=2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x_0-1=2 \Leftrightarrow x_0=3\right)\text{ ή }\left(x_0-1=-2 \Leftrightarrow x_0=-1 \text{ απορρίπτεται}\right).$$

Τότε $y_0=2\cdot 3-1=5$, οπότε Κ(3, 5) και ο κύκλος έχει εξίσωση

$$(x-3)^2+(y-5)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=18.$$

β) i. Επειδή η ΚΑ είναι ακτίνα, είναι

$KA\perp\zeta \Leftrightarrow \lambda_{KA}\cdot\lambda_\zeta=-1 \Leftrightarrow \lambda_{KA}\cdot\frac{-1}{1}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{KA}=1$, οπότε η ΚΑ έχει εξίσωση: $y-5=x-3 \Leftrightarrow x-y+2=0$.

ii. Επειδή το Α είναι κοινό σημείο των ΚΑ, ζ, για τις συντεταγμένες του έχουμε:

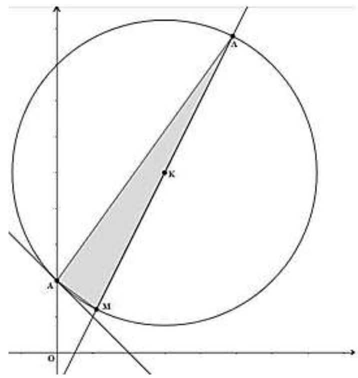
$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ και } 0+y-2=0 \Leftrightarrow y=2 \text{, άρα } A(0,\, 2).$$

γ) Επειδή τα σημεία Μ, Λ ανήκουν στην ε που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, η ΜΛ είναι διάμετρος του κύκλου, οπότε $(\text{ΜΛ})=2\rho=6\sqrt{2}$.

Είναι ε: $y=2x-1 \Leftrightarrow 2x-y-1=0$.

Το ύψος υ του τριγώνου είναι η απόσταση του Α από τη ΜΛ, δηλαδή από την ε, άρα

$$\upsilon=d(A,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-2-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$



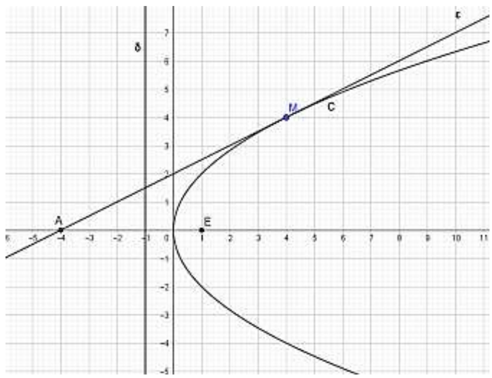
Οπότε

$$(\text{ΑΜΛ})=\frac{1}{2}(\text{ΜΛ})\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^5}=\frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

Παραβολή
2ο Θέμα

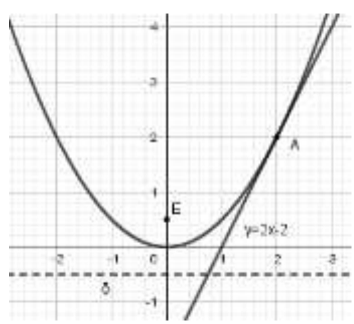
18242.α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες Ε(1,0) και η διευθετούσα είναι η δ: x = - 1.
β) Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση
$yy_1 = p\left(x + x_1\right) \Leftrightarrow 4y = 2\left(x + 4\right) \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

γ)



18701. α) $y = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y$. Είναι $2p = 2 \Leftrightarrow p = 1$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες Ε$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και η διευθετούσα είναι η δ: y = $-\frac{1}{2}$.
β) $xx_1 = p\left(y + y_1\right) \Leftrightarrow 2x = y + 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

γ) σχήμα



20235.α) Είναι $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$ οπότε η εστία έχει συντεταγμένες Ε(2,0) και η διευθετούσα είναι η δ: x = - 2.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $\left(\frac{1}{8},1\right)$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1 : y\cdot 1 = 4\left(x+\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = 4x+\frac{1}{2}$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 4$.

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{8}{-2} = 4$, οπότε

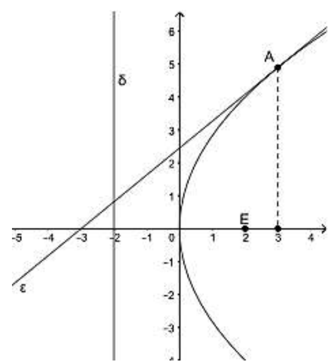
$\lambda_\varepsilon = \lambda_1 \Leftrightarrow \varepsilon // \varepsilon_1$.

21248.α) i. $(ME) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ **ii.** $d(M,\delta) = |x+2|$

β) $(ME) = d(M,\delta) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+2| \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 8x$.



21306.α) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x΄x και κορυφή O(0,0) έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$. Άρα

$\frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4$, οπότε η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2\cdot 4x = 8x$.

Το σημείο $A(3, y_A)$) της παραβολής έχει $y_A > 0$, εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.

Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

Επομένως $y_A^2 = 8\cdot 3 = 24 \Leftrightarrow y_4 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ και $A\left(3, 2\sqrt{6}\right)$.

β) Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία

$x = -\frac{p}{2} = -2$.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της A έχει εξίσωση:

$y\cdot 2\sqrt{6} = 4(x+3) \Leftrightarrow y\sqrt{6} - 2x - 6 = 0$.

21307.α) Είναι $2p=12 \Leftrightarrow p=6$, Η εστία είναι η $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ ή $E(0,3)$.

Το σημείο (x_0 , 3) ανήκει στην παραβολή, άρα:

$x_0^2=12\cdot 3=36 \Leftrightarrow x_0=\pm 6$.

Επομένως Α(6,3) και Β(-6,3) είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η ε_1 έχει εξίσωση $x\cdot 6=6(y+3) \Leftrightarrow x=y+3 \Leftrightarrow y=x-3$ και η ε_2 έχει εξίσωση $x\cdot(-6)=6(y+3) \Leftrightarrow -x=y+3 \Leftrightarrow y=-x-3$.

γ) Είναι $\begin{cases} y=x-3 \\ y=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x-3=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases}$, άρα το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) είναι το σημείο (0, −3).

22190.α) Είναι $2p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{p}{2}=\frac{1}{4}$, οπότε η εστία Ε έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{4},0\right)$.

β) Το σημείο Α ανήκει στη παραβολή αν και μόνο αν $(-1)^2=1$ που ισχύει.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Α έχει εξίσωση

$y\cdot(-1)=\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

22267. α) Είναι $2p=4 \Leftrightarrow p=2 \Leftrightarrow \frac{p}{2}=1$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες **Ε(1,0)** και η διευθετούσα έχει εξίσωση **x = -1**».

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Α έχει εξίσωση ε:

$y\cdot(-2)=2(x+1) \Leftrightarrow y=-x-1$.

γ) Για y = 0 η ε γίνεται $-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$, δηλαδή η ε τέμνει τον x΄x στο $B(-1,0)$.

Επειδή η διευθετούσα της παραβολής έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$, δηλαδή $x=-1$, το Β είναι σημείο της διευθετούσας.

4ο Θέμα

15394. α) Είναι $2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$.

Η ε έχει εξίσωση $y \cdot 2\sqrt{3} = 6(x+1) \Leftrightarrow y = \dfrac{6}{2\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}(x+1) = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}.$$

β) Είναι $\dfrac{p}{2} = 3$, οπότε η εστία Ε έχει συντεταγμένες (3,0) και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση x = - 3.

Για y =0 η ε γίνεται: $0 = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 <$ άρα $B(-1,0)$.

Η ευθεία Mt έχει εξίσωση $y = 2\sqrt{3}$, οπότε το Η έχει συντεταγμένες $\left(-3, 2\sqrt{3}\right)$.

γ) Είναι $(MH) = 1 + 3 = 4$ και $(BE) = 1 + 3 = 4$. Επειδή ΜΗ//ΒΕ και $(MH) = (BE)$, το τετράπλευρο ΜΕΒΗ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Είναι $(ME) = \sqrt{(3-1)^2 + \left(0 - 2\sqrt{3}\right)^2} = 4$, άρα το ΜΕΒΗ έχει επιπλέον και δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής Μ, διχοτομεί την γωνία EMt όπου Ε η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο Μ.

Είναι $\varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\zeta = -\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε η (ζ) έχει εξίσωση:

$$y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

18245.α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2} = 1$, άρα Ε(1,0) και δ: x= - 1.

β) Είναι $\begin{cases}\lambda^2-1=0\\ 2\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=0\end{cases}$ αδύνατο, άρα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι

$\lambda^2-1\neq 0$ ή $2\lambda\neq 0$, οπότε η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν διέρχονταν από το τα Ο, τότε $(\lambda^2-1)\cdot 0+2\lambda\cdot 0+\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda^2=-1$ αδύνατη, άρα δεν διέρχεται από το Ο.

γ) Αν $\lambda\neq 0$ τότε η (1) γίνεται

$2\lambda y=-(\lambda^2-1)x-\lambda^2-1\Leftrightarrow y=-\dfrac{\lambda^2-1}{2\lambda}x-\dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda}$ και είναι ευθεία που δεν είναι κάθετη στον x΄x όπως η διευθετούσα δ. Αν λ = 0 τότε η (1) γίνεται $-x+1=0\Leftrightarrow x=1$

και δεν είναι πάλι η δ, άρα η δ δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

δ) Επειδή το Μ δεν ανήκει στη διευθετούσα, είναι $\alpha\neq -1$. Για να διέρχεται μία από τις ευθείες ε_λ από το Μ πρέπει η εξίσωση

$(\lambda^2-1)\alpha+2\lambda\beta+\lambda^2+1=0$ να έχει μοναδική λύση ως προς λ.

Είναι $(\lambda^2-1)\alpha+2\lambda\beta+\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda^2\alpha-\alpha+2\lambda\beta+\lambda^2+1=0\Leftrightarrow$

$\lambda^2(\alpha+1)+2\lambda\beta+1-\alpha=0$.

Η εξίσωση αυτή ως προς λ είναι 2ου βαθμού και έχει μοναδική λύση μόνο όταν

$\Delta=0\Leftrightarrow(2\beta)^2-4(\alpha+1)(1-\alpha)=0\Leftrightarrow 4\beta^2-4(1-\alpha^2)=0\Leftrightarrow$

$\beta^2-1+\alpha^2=0\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=1$ που σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση $x^2+y^2=1$. Επομένως το Μ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο ο οποίος διέρχεται από την εστία Ε(1,0) της παραβολής, αφού $1^2+0^2=1$.

18372.α) Είναι $2p=4\Leftrightarrow p=2$.

Είναι $\dfrac{p}{2}=1$, οπότε η εστία Ε έχει συντεταγμένες (1,0) και η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση x = - 1.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1,y_1)$ δίνεται από την εξίσωση: $yy_1=2(x+x_1)\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{y_1}+\dfrac{2x_1}{y_1}$.Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_\varepsilon=\dfrac{2}{y_1}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ είναι

$\lambda_{AB}=\dfrac{-4+2}{0+2}=-1$.

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην ΑΒ πρέπει

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = -1 \Leftrightarrow y_1 = -2 \cdot$$

Επειδή όμως το σημείο Μ ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή

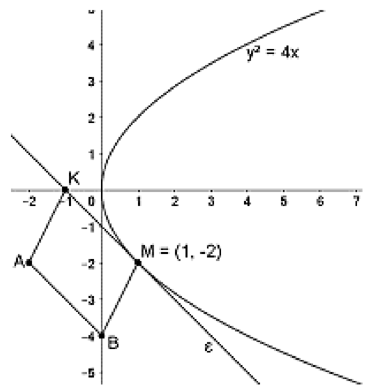
$y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 4 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$, άρα $M(1,-2)$.

γ) Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της Μ(1,-2) έχει εξίσωση

$y(-2) = 2(x+1) \Leftrightarrow y = -x-1$.

Για y = 0 είναι $-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα x΄x είναι το Κ(-1.0).



Είναι $(KM) = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} \Leftrightarrow$

$(KM) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ και

$(AB) = \sqrt{(0+2)^2 + (-4+2)^2} \Leftrightarrow$

$(AB) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$.

Τα τμήματα ΑΒ και ΚΜ είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο ΑΒΜΚ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

18741.α) Η παραβολή διέρχεται από το σημείο Μ οπότε

$(\alpha+4)^2 = 16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha + 16 = 16\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 8\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

β) Είναι $C: y^2 = 4x$ οπότε η παραβολή έχει εστία $E(1,0)$ και διευθετούσα $(\delta): x = -1$.

γ) Αν (ε_1) η εφαπτομένη της παραβολής είναι : $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$ οπότε

$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{2}x + \beta, \beta \in \mathbb{R}$.

Είναι : $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \beta \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \beta \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{y^2}{8} + \beta \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 8y = y^2 + 8\beta \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 8y + 8\beta = 0 \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases}.$

Για να έχουν ένα κοινό σημείο πρέπει

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 64 - 32\beta = 0 \Leftrightarrow 32\beta = 64 \Leftrightarrow \beta = 2$ οπότε

$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

δ) Ο κύκλος έχει κέντρο $O(0,0)$, το οποίο είναι η κορυφή της παραβολής.

Αν ρ η ακτίνα του κύκλου είναι $d(O,\delta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \rho \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{5}} = \rho \Leftrightarrow$

$\rho = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Επομένως ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \frac{16}{5}$.

18870.α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα Ε(1,0) και δ: x= - 1.

β) Η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της παραβολής στο Α(4,4), οπότε έχει εξίσωση: $4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$. Για y = 0 είναι

$\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -2 \Leftrightarrow x = -4$, οπότε η ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β(-4,0).

γ) Είναι $(MA) = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ και

$(MB) = 1 + 4 = 5$.

Επειδή (ΜΑ) = (ΜΒ) το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές.

δ) Έστω Μ(x, 0), τότε

$(MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 16} = |x + 4| \Leftrightarrow (x-4)^2 + 16 = (x+4)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 16 + 16 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow 16x = 16 \Leftrightarrow x = 1$, άρα Μ(1,0) οπότε το Μ ταυτίζεται με την εστία Ε.

19047.α) Έστω Α το συμμετρικό του Β ως προς τον άξονα y΄y, τότε $(AB)=1280m$, οπότε $x_A=-640,\ x_B=640$.

Επειδή το ύψος του κάθε πυλώνα σε σχέση με το οδόστρωμα της γέφυρας είναι 160m, είναι $y_A=y_B=160$, οπότε $A(-640,160)$ και $B(640,160)$.

Η παραβολή έχει εξίσωση της μορφής $x^2=2py$ και επειδή διέρχεται από τα Α, Β, ισχύει ότι: $640^2=2p\cdot 160 \Leftrightarrow 320p=640\cdot 640 \Leftrightarrow$

$p=\dfrac{640\cdot \cancel{640}^{\,2}}{\cancel{320}}=1280$, οπότε η παραβολή έχει εξίσωση $x^2=2560y$.

β) Είναι $\dfrac{p}{2}=640$, οπότε Ε(0,640) και (δ): $y=-\dfrac{p}{2}\Leftrightarrow y=-640$.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Β έχει εξίσωση:

$x\cdot 640=1280(y+160)\Leftrightarrow x=2y+320$.

Για x = 0 είναι $2y+320=0\Leftrightarrow 2y=-320\Leftrightarrow y=-160$, άρα Δ(0, - 160).

Είναι $(E\Delta)=|-160-640|=800$ και

$(EB)=\sqrt{640^2+(640-160)^2}=\sqrt{640^2+480^2}\Leftrightarrow$

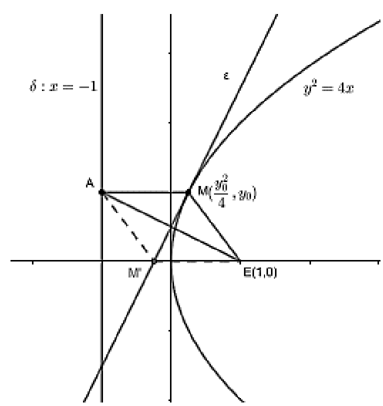
$(EB)=\sqrt{64^2\cdot 10^2+48^2\cdot 10^2}=\sqrt{(64^2+48^2)\cdot 10^2}\Leftrightarrow$

$(EB)=10\sqrt{(8^2\cdot 8^2+8^2\cdot 6^2)}=10\sqrt{8^2(8^2+6^2)}=10\cdot 8\cdot\sqrt{100}=80\cdot 10=800$

, άρα $(E\Delta)=(EB)$.

20090.α) i. Επειδή το Μ είναι σημείο της παραβολής, ισχύει ότι

$y_0^2=4x_0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{y_0^2}{4}$, άρα $M\left(\dfrac{y_0^2}{4},y_0\right)$.



Είναι $2p=4\Leftrightarrow p=2\Leftrightarrow \dfrac{p}{2}=1$, άρα Ε(1,0) και δ: x= - 1.

Επειδή ΜΑ//x΄x είναι $y_A=y_M=\dfrac{y_0^2}{4}$,

οπότε το Α έχει συντεταγμένες $\left(-1,\dfrac{y_0^2}{4}\right)$.

ii. Είναι $\overrightarrow{MA}=\left(-1-\frac{y_0^2}{4},0\right)$, $\overrightarrow{EM}=\left(\frac{y_0^2}{4}-1,y_0\right)$.

$$\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{EM}\right)=\begin{vmatrix}-1-\frac{y_0^2}{4} & 0\\ \frac{y_0^2}{4}-1 & y_0\end{vmatrix}=y_0\left(-1-\frac{y_0^2}{4}\right)=-\frac{4y_0+y_0^2}{4}.$$

$$(MAE)=\frac{5}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{EM}\right)\right|=\frac{5}{8}\Leftrightarrow$$

$$\left|-\frac{4y_0+y_0^2}{4}\right|=\frac{5}{4}\overset{y_0>0}{\Leftrightarrow}\frac{4y_0+y_0^2}{4}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 4y_0+y_0^2=5\Leftrightarrow$$

$y_0^2+4y_0-5=0\Leftrightarrow y_0=1$ ή $y_0=-5$ απορρίπτεται. Άρα $M\left(\frac{1}{4},1\right)$.

β) Η ε έχει εξίσωση $y\cdot 1=2\left(x+\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow y=2x+\frac{1}{2}$. Για y=0 είναι

$2x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$, άρα $M'\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

Είναι $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\frac{1}{4}-(-1)=\frac{5}{4}$, $\left|\overrightarrow{ME}\right|=\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+1^2}=\frac{5}{4}$ και όμοια

$\left|\overrightarrow{M'E}\right|=\left|\overrightarrow{M'A}\right|=\frac{5}{4}$, οπότε το τετράπλευρο

ΑΜΕΜ΄ έχει και τις 4 πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος.

20862.α) Η (ε_1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$ και εξίσωση $y-2=x+2\Leftrightarrow y=x+4$.

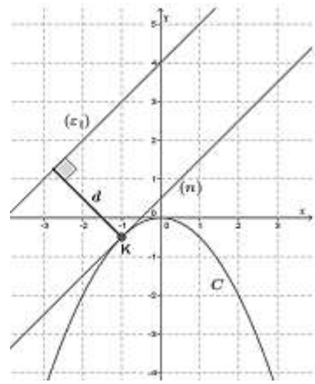
β) Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο Ε και την ευθεία (ζ), είναι παραβολή με εστία το Ε και διευθετούσα τη (ζ), άρα $\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow p=-1$, οπότε η παραβολή έχει εξίσωση: $x^2=2py\Leftrightarrow x^2=-2y$.

γ) i. Έστω $K(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη παραβολή. Τότε $x_1^2=-2y_1\,(1)$.

Η εφαπτομένη στο Κ έχει εξίσωση (η):
$x\cdot x_1=-1(y+y_1)\Leftrightarrow x\cdot x_1=-y-y_1\Leftrightarrow y=-x\cdot x_1-y_1$ και συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda = -x_1$. Επειδή η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη (ζ), ισχύει ότι $\lambda_\zeta = \lambda \Leftrightarrow -x_1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1$

και από την $(1) \Rightarrow 1 = -2y_1 \Leftrightarrow y_1 = -\frac{1}{2}$, οπότε η εφαπτομένη στο Κ έχει εξίσωση: $y = -(-1)x - \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{1}{2}$.



ii. Από το σχήμα προκύπτει ότι η παραβολή βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της (η) εκτός του σημείου Κ.
Επειδή οι ευθείες (η) και (ε_1) είναι παράλληλες, η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με την απόσταση του Κ από την $(\varepsilon_1): y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$, που είναι:

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{\left|-1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-1 + \frac{1}{2} + 4\right|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

Αν Λ οποιοδήποτε σημείο της παραβολής, ισχύει ότι:
$d(\varepsilon_1, \eta) = d(K, \varepsilon_1) < d(\Lambda, \varepsilon_1)$, επομένως η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι $\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

20684.α) Από τον ορισμό της παραβολής, έχουμε ότι ΑΒ = ΑΕ.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $BE = \frac{A\Gamma}{2} = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

β) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα Ε(1, 0) και (δ): x = -1, άρα $B(-1, y_A)$. Επειδή το Γ Είναι σημείο της διευθετούσας έχει $x_\Gamma = -1$. Επειδή το Ε είναι μέσο του ΑΓ, ισχύει ότι

$x_E=\dfrac{x_A+x_\Gamma}{2}\Leftrightarrow 1=\dfrac{x_A-1}{2}\Leftrightarrow 2=x_A-1\Leftrightarrow x_A=3$. Είναι

$y_A^2=4x_A=12\overset{y_A>0}{\Leftrightarrow} y_A=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

γ) Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Β, ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το Ε και ακτίνα την ΑΕ.

Είναι $(AE)=\sqrt{(3-1)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$, οπότε ο κύκλος έχει

εξίσωση: $(x-1)^2+y^2=16$.

21653.α) Το σημείο Ρ έχει σταθερή τετμημένη και μεταβαλλόμενη τεταγμένη οπότε κινείται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία (δ): $x=-2$.

β) Τα σημεία Ρ και Π κάθε χρονική στιγμή έχουν ίδια τεταγμένη ίση με λ άρα ΠΡ//x΄x άρα $\Pi P\perp(\delta)$.

γ) Αφού κάθε χρονική στιγμή είναι $(\Pi E)=(\Pi P)\Leftrightarrow(\Pi E)=d(\delta,\Pi)$ τότε το Π κινείται στην παραβολή με διευθετούσα την (δ) : $x=-2$ και εστία το Ε(2,0) . Άρα έχει εξίσωση $y^2=2px$ με $\dfrac{p}{2}=2\Leftrightarrow p=4$ άρα τελικά είναι C:

$y^2=8x$.

δ) Το μέσο του ΕΡ είναι $M\left(0,\dfrac{\lambda}{2}\right)$ και έστω (ε) η μεσοκάθετη του ΕΡ.

Είναι $\lambda_{EP}=\dfrac{\lambda-0}{-2-2}=-\dfrac{\lambda}{4}$ και $\lambda_{EP}\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\dfrac{4}{\lambda}$ αφού $\lambda>0$

(1ο τεταρτημόριο το Π). Άρα η μεσοκάθετος (ε) έχει εξίσωση

$(\varepsilon): y-\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{4}{\lambda}(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{4}{\lambda}x+\dfrac{\lambda}{2}$ με $\lambda>0$.

Από το σύστημα των ε, C έχουμε:

$$\begin{cases} y=\dfrac{4}{\lambda}x+\dfrac{\lambda}{2} \\ y^2=8x \end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{4}{\lambda}x+\dfrac{\lambda}{2}\right)^2=8x\Leftrightarrow\left(\dfrac{8x+\lambda^2}{2\lambda}\right)^2=8x\Leftrightarrow$$

$64x^2+16\lambda^2x+\lambda^4=32\lambda^2x\Leftrightarrow 64x^2-16\lambda^2x+\lambda^4=0$. Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x και έχει Δ=0, οπότε η ε εφάπτεται της παραβολής.

Επειδή το Π είναι σημείο της παραβολής, Ε είναι η εστία της και το Ρ ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής, ισχύει ότι

$(\Pi E)=d(\Pi,\delta)\Leftrightarrow(\Pi E)=(\Pi P)$.

Επειδή το Π ισαπέχει από τα Ε, Ρ, βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΕΡ, δηλαδή την ε, επομένως η ε εφάπτεται της παραβολής στο Π.

20092.α) i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας ε είναι αδύνατο.

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x - 3y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} = x \\ y^2 - 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

Το τριώνυμο $y^2 - 3y + 12$, έχει $\Delta < 0$ άρα η εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ είναι αδύνατη, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Είναι $d(M,\varepsilon) = \dfrac{\left|4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot 1 + 12\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$.

ii. Στην ε για y=0 έχουμε $4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ και για x = 0 έχουμε $-3y + 12 = 0 \Leftrightarrow y = 4$, άρα Γ(-3,0) και Δ(0,4).

Είναι $\overrightarrow{M\Gamma} = \left(-3 - \dfrac{1}{4}, 0 - 1\right) = \left(-\dfrac{13}{4}, -1\right)$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (0+3, 4-0) = (3,4)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{M\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{13}{4} & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -13 + 3 = -10$ και

$(M\Gamma\Delta) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{M\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right)\right| = 5$.

β) i. Έστω $K(x_1, y_1)$ με $y_1 \neq 0$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Κ έχει εξίσωση

$yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{y_1}x + \dfrac{2x_1}{y_1}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda_\zeta = \dfrac{2}{y_1}$ και $\lambda_\varepsilon = \dfrac{4-0}{0+3} = \dfrac{4}{3}$.

ε//ζ$\Leftrightarrow$ $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{2}{y_1} = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 4y_1 = 6 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{3}{2}$.

Επειδή το Κ είναι σημείο της παραβολής, ισχύει ότι

$y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{9}{16}$.

Τότε η ζ έχει εξίσωση

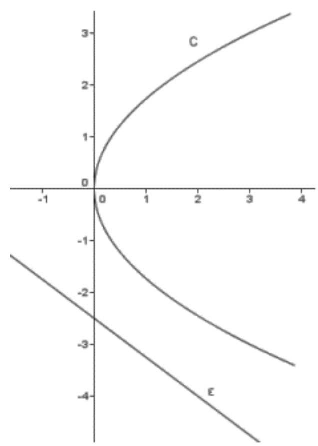
$$y=\frac{2}{\frac{3}{2}}x+\frac{2\frac{9}{16}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}x+\frac{3}{4}\Leftrightarrow 12y=16x+9\Leftrightarrow 16x-12y+9=0.$$

ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών η και ε, αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω Λ, της η και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ε.

Για x = 0 η ζ γίνεται $-12y+9=0\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}$, άρα $\Lambda\left(0,\frac{3}{4}\right)$.

$$d(\zeta,\varepsilon)=d(\Lambda,\varepsilon)=\frac{\left|4\cdot 0-3\cdot\frac{3}{4}+12\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{\left|-\frac{9}{4}+\frac{48}{4}\right|}{5}=\frac{39}{20}.$$

21690.α) Για τα κοινά σημεία της παραβολής με την ευθεία λύνουμε το σύστημα:



$$\begin{cases}y^2=3x\\3x+4y+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=3x\\y^2+4y+10=0\end{cases}$$ το

οποίο είναι αδύνατο καθώς η εξίσωση $y^2+4y+10=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-24<0$ άρα είναι αδύνατη.

β) Αφού το Μ είναι σημείο της παραβολής $C: y^2=3x$ τότε

$y_0^{\,2}=3x_0\Leftrightarrow x_0=\frac{y_0^{\,2}}{3}$ άρα $M\left(\frac{y_0^{\,2}}{3},y_0\right)$ και

η απόστασή του από την (ε) είναι $d(M,\varepsilon)=\frac{\left|3\frac{y_0^{\,2}}{3}+4y_0+10\right|}{\sqrt{9+16}}=\frac{\left|y_0^{\,2}+4y_0+10\right|}{\sqrt{25}}=$

$$=\frac{\left|y_0^{\,2}+4y_0+4+6\right|}{5}=\frac{\left|(y_o+2)^2+6\right|}{5}=\frac{(y_o+2)^2+6}{5}.$$

γ) Είναι $(y_o+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y_o+2)^2+6 \geq 6 \Leftrightarrow$

$\frac{(y_o+2)^2+6}{5} \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow d(M,\varepsilon) \geq \frac{5}{6}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για

$y_0=-2$. Άρα η μικρότερη απόσταση είναι $\frac{5}{6}$ και το πλησιέστερο σημείο

το $M\left(\frac{4}{3},-2\right)$.

δ) Αν την παραβολή την γράψουμε στην μορφή $y^2=2px$ τότε είναι

$p=\frac{3}{2}$ και η εφαπτομένη της παραβολής στο $M\left(\frac{4}{3},-2\right)$ έχει εξίσωση

(ζ): $-2y=\frac{3}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow -2y=\frac{3}{2}x+2 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-1$

Είναι επίσης $\varepsilon: 3x+4y+10=0 \Leftrightarrow 4y=-3x-10 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$. Ισχύει

ότι $\lambda_\zeta=\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{4}$ άρα ζ//ε.

21883.α) Είναι $2p=4 \Leftrightarrow p=2 \Leftrightarrow \frac{p}{2}=1$, οπότε η εστία Ε έχει συντεταγμένες (0,1) και η διευθετούσα είναι η ευθεία δ: y= - 1.

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4(x-2) \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4x-8 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+8=0 \ (1) \\ y=x-2 \end{cases}.$$

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= - 16 < 0, οπότε είναι αδύνατη.

Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) i. Είναι $\varepsilon: y = x - 2 \Leftrightarrow -x + y + 2 = 0$. Επειδή το Μ είναι σημείο της παραβολής ισχύει ότι $x^2 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$, άρα το Μ έχει συντεταγμένες $\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$.

$$d(M,\varepsilon) = \frac{\left|-x + \frac{x^2}{4} + 2\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{1}{4}x^2 - x + 2\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$$, γιατί το τριώνυμο

$\frac{1}{4}x^2 - x + 2$ έχει Δ=- 1 < 0, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 > 0$.

ii. $$d(M,\varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 1 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1}{\sqrt{2}}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow$

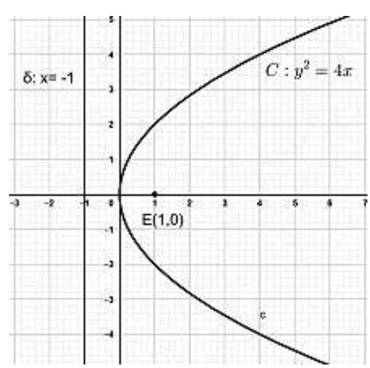
$$\frac{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d(M,\varepsilon) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ της παραβολής από την ε είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν $\frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το Μ(2,1).

22465.α) Είναι $d(E,\delta) = p \Leftrightarrow p = 4$.

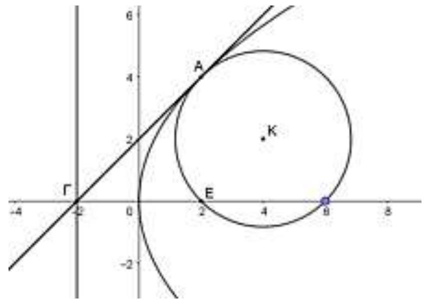
Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων Ο και άξονα συμμετρίας τον x΄x είναι η $y^2 = 2px$, η εστία της είναι το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση

δ: $x = -\frac{p}{2}$.



Είναι Ε(2,0) , δ : x= -2 και C: $y^2 = 8x$.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής που διέρχεται από το Α έχει εξίσωση ε:
$y \cdot 4 = 4(x+2) \Leftrightarrow y = x+2$.



γ) Έστω $K(x_0, y_0)$ το κέντρο του κύκλου.

Είναι $KA \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{KA}\lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow$
$\lambda_{KA} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{KA} = -1$.

Η ευθεία ΚΑ έχει εξίσωση
$y - 4 = -(x-2) \Leftrightarrow y = -x+6$ και επειδή το Κ είναι σημείο της, ισχύει ότι $y_0 = -x_0 + 6$ (1).

Είναι $(AK) = (EK) \Leftrightarrow \sqrt{(x_0-2)^2 + (y_0-4)^2} = \sqrt{(x_0-2)^2 + y_0^2} \Leftrightarrow$

$\cancel{(x_0-2)^2} + (y_0-4)^2 = \cancel{(x_0-2)^2} + y_0^2 \Leftrightarrow$

$y_0^2 - 8y_0 + 16 = y_0^2 \Leftrightarrow 8y_0 = 16 \Leftrightarrow y_0 = 2$. Τότε από την (1) είναι
$2 = -x_0 + 6 \Leftrightarrow x_0 = 4$, άρα το κέντρο Κ του κύκλου έχει συντεταγμένες (4,2).

Η ακτίνα ρ του κύκλου είναι $\rho = (KE) = \sqrt{(4-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8}$, οπότε ο κύκλος έχει εξίσωση:
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 8$.

22275.α) Είναι $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 1$, άρα Ε(1,0) και δ: x= - 1.

β) Έστω $M(x_1, y_1)$ σημείο της παραβολής. Τότε $y_1^2 = 4x_1$ (1).

Η εφαπτομένη της παραβολής στο Α έχει εξίσωση ε: $y \cdot y_1 = 2(x + x_1)$.

Η ε διέρχεται από το Α, αν και μόνο αν $2 \cdot y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε
$x_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

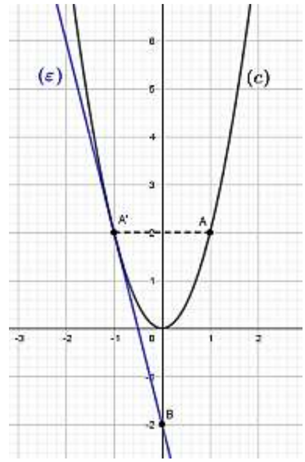
Αν $x_1 = 0$ τότε $y_1 = 0$ και η εφαπτομένη είναι η $y \cdot 0 = 2(x+0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας y΄y.

Αν $x_1 = 4$ τότε $y_1 = 4$ και η εφαπτομένη είναι η
$y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$.

1ο Θέμα

21152.α) i. Σωστό
Σελίδα 19 σχολικό βιβλίο.
ii. Λάθος.
Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A\left(x_o, y_o\right)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x΄x έχει εξίσωση $y = yo$.
iii. Λάθος
Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A,B)$.
iv. Σωστό
Σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.
v. Σωστό
Σελίδα 83 σχολικό βιβλίο.
β) Σελίδα 60 σχολικό βιβλίο – Εξίσωση ευθείας.

3ο Θέμα



20866.α) Η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y είναι της μορφής $x^2 = 2py$. Επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1,2) ισχύει ότι $1 = 4p \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$, άρα (c): $x^2 = \frac{1}{2}y$.

β) Επειδή τα συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα y΄y έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη, το συμμετρικό σημείο του Α(1,2) είναι το Α΄ (- 1, 2).

γ) i. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση ε:

$$x(-1) = \frac{1}{4}(y+2) \Leftrightarrow -4x = y + 2 \Leftrightarrow y = -4x - 2.$$

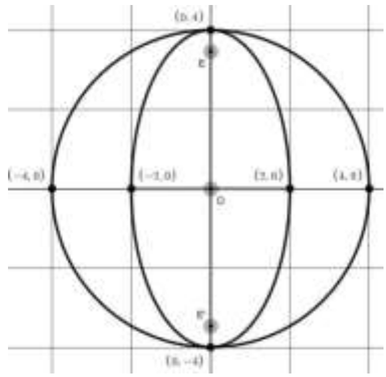
ii. Για x = 0 η ε γίνεται y = - 2, οπότε τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,2).

Για y=0 η ε γίνεται $-4x - 2 = 0 \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, άρα η ε τέμνει τον άξονα x΄x στο $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Έλλειψη
2ο Θέμα

20658.α) Είναι $\alpha^2 = 16 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 4$, $\beta^2 = 4 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 2$ και

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16 - 4 = 12 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = 2\sqrt{3}$.



β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος 2β = 2 · 2 = 4.
Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος 2α = 2 · 4 = 8.
γ) Ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα $\rho = \sqrt{16} = 4$

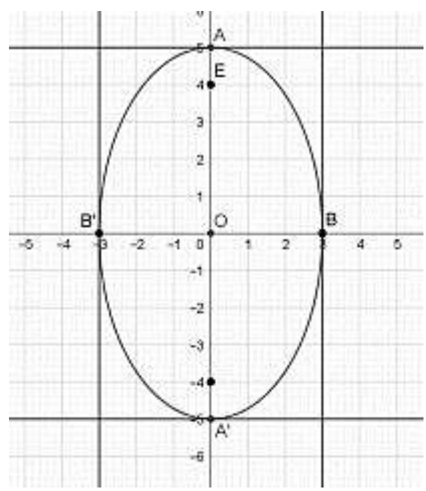
20718.α) Είναι $\alpha^2 = 25 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 5$,

$\beta^2 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$ και

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = 4$,

οπότε οι εστίες είναι

$E'(0,-4)$ και $E(0,4)$.



β) Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία Α(0,5), Α΄(0,-5), Β(3,0) και Β΄(-3,0) και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
γ) Οι εφαπτομένες της C στα Α, Α΄, Β, Β΄ είναι αντίστοιχα οι ευθείες y = 5, y = - 5, x = 3 και x = - 3.

20865.α) $C_1: \; x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Είναι $\alpha^2 = 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$, $\beta^2 = 1 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 1$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 4 - 1 = 3 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = \sqrt{3}$.
Η έλλειψη C_1 έχει μεγάλο άξονα με μήκος $2\alpha = 4$, μικρό άξονα με μήκος $2\beta = 2$ και εστίες τα σημεία $E_1'\left(-\sqrt{3},0\right)$, $E_1\left(\sqrt{3},0\right)$.

$C_2: \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Είναι $\alpha^2 = 16 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 4$, $\beta^2 = 4 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 2$ και

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 16 - 4 = 12 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = 2\sqrt{3}$.

Η έλλειψη C_2 έχει μεγάλο άξονα με μήκος $2\alpha = 8$, μικρό άξονα με μήκος $2\beta = 4$ και εστίες τα σημεία

$E_2'\left(-2\sqrt{3},0\right)$, $E_2\left(2\sqrt{3},0\right)$.

β) Η έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και η έλλειψη C_2 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

20883.α) $C: 16x^2 + 25y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400} \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι (Α΄Α) = 2α = 2·5 = 10,
το μήκος του μικρού άξονα είναι (Β΄Β) = 2β = 2·4 = 8 και οι εστίες είναι Ε΄(-3,0) και Ε(3,0).

β) Θέλουμε η Ε΄ να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα

$\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$ και η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2(-6)x = -12x$.

21308.α) Είναι $\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \gamma = 3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι Ε(3,0) και Ε΄(−3,0). Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma = 2 \cdot 3 = 6$.

β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος 2β = 2 · 4 = 8.
Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος 2α = 2 · 5 = 10.

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Β έχει εξίσωση:

$\frac{x \cdot 0}{25} + \frac{y \cdot 4}{16} = 1 \Leftrightarrow y = 4$.

21647.α) Επειδή η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E΄(-4,0)$, είναι $\gamma = 4$.
Επειδή η C έχει μεγάλο άξονα 10 είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$. Είναι
$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 16 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$.

Επειδή η έλλειψη έχει εστίες στον x΄x η εξίσωση της είναι C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

β) $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}$.

γ) Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $\frac{x \cdot 4}{25} + \frac{y \cdot \frac{9}{5}}{9} = 1 \Leftrightarrow 4x + 5y = 25$.

21648.α) Επειδή η έλλειψη έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E΄(-3,0)$, είναι $\gamma = 3$.
β) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ότι $(ME) + (ME') = 2\alpha \Leftrightarrow$

$$2\alpha = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5} - 0\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} + \sqrt{49 + \frac{144}{25}} \Leftrightarrow 2\alpha = \sqrt{\frac{169}{25}} + \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{13}{5} + \frac{37}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

Επομένως ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 10.
γ) Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 25 - 9 = 16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 4$.

Επειδή η έλλειψη έχει εστίες στον x΄x η εξίσωση της είναι C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση

$$\frac{x \cdot 4}{25} + \frac{y \cdot \frac{12}{5}}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{25} + \frac{12y}{80} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{25} + \frac{3y}{20} = 1 \Leftrightarrow 16x + 15y = 100.$$

22168.α) i. Επειδή η παραβολή διέρχεται από το σημείο A, ισχύει ότι $2^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow p = 2$, άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 4x$.

ii. Είναι $\frac{p}{2} = 1$, οπότε η εστία της παραβολής είναι το σημείο E(1,0).

β) Επειδή η εστία της έλλειψης είναι το Ε, ισχύει ότι γ = 1.
Επειδή ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4, ισχύει ότι
$2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Είναι $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4 - 1 = 3 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = \sqrt{3}$.
Επειδή η έλλειψη έχει κέντρο το Ο και εστίες στον άξονα x΄x, έχει
εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

22192.α) Είναι $\alpha^2 = 225 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 15$, $\beta^2 = 81 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 9$.

Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = 12$, άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι Ε(12,0) και Ε΄(−12,0).
β) Το σημείο Β είναι σημείο της έλλειψης, αν και μόνο αν:
$\dfrac{0^2}{225} + \dfrac{9^2}{81} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{81}{81} = 1$ ισχύει.
γ) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Β έχει εξίσωση
$\dfrac{x \cdot 0}{225} + \dfrac{y \cdot 9}{81} = 1 \Leftrightarrow 9y = 81 \Leftrightarrow y = 9$.

22268.α) Είναι $\alpha^2 = 9 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 3$, $\beta^2 = 4 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 2$. Είναι
$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 = 5 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = \sqrt{5}$,
«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε΄ , έχουν συντεταγμένες $E\left(\sqrt{5},0\right)$ και $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$. Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με 2α=6 και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ».
β) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Β έχει εξίσωση
$\dfrac{x \cdot 0}{9} + \dfrac{y \cdot (-2)}{4} = 1 \Leftrightarrow -2y = 4 \Leftrightarrow y = -2$.

22556.α) i.Επειδή $A'(-5,0), A(5,0)$, είναι α= 5. Επειδή
$B'(0,-4)$, $B(0,4)$, είναι β = 4.
Είναι $(A'A) = 2\alpha = 10$ και $(B'B) = 2\beta = 8$.

ii. Είναι $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2=25-16=0 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma=3$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$.

β) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ότι $(ME')+(ME)=2\alpha=10$.

22558.α) Επειδή οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$, ισχύει ότι $\gamma = 2$.

Είναι $(A'A)=2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=4$. Είναι

$\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=16-4=12 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

β) i. Επειδή τα σημεία Σ και Ρ έχουν $x = 2$, ισχύει ότι

$\frac{2^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{y^2}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{12}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 3$, άρα $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii. $(\Sigma P)=3-(-3)=6$.

22564.α) Το σημείο Α ανήκει στις C_1, C_2, αν και μόνο αν:

$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ ισχύει και $\frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$ ισχύει.

Όμοια για το Β.

β) Η εφαπτομένη της C_1 στο Α έχει εξίσωση

$\varepsilon_1: \frac{x\cdot 2}{12}+\frac{y\cdot 2}{6}=1 \Leftrightarrow 2x+4y=12 \Leftrightarrow x+2y=6$

και η εφαπτομένη της C_2 στο Β έχει εξίσωση

$\varepsilon_2: \frac{x\cdot(-2)}{6}+\frac{y\cdot 2}{12}=1 \Leftrightarrow -4x+2y=12 \Leftrightarrow -2x+y=6$.

γ) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και

$\lambda_2=-\frac{-2}{1}=2$ αντίστοιχα.

Είναι $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

4ο Θέμα

22273.α) i. Είναι $\alpha^2 = 9 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 3,\ \beta^2 = 4 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 2$.

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0), δηλαδή στα Α(3,0) και Α΄(-3,0).

ii. Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9 - 4 = 5 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = \sqrt{5}$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E\left(\sqrt{5},0\right)$ και $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$.

β) Έστω $M\left(x_1, y_1\right)$ το σημείο της έλλειψης από στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το Α.

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ έχει εξίσωση ε: $\frac{xx_1}{9} + \frac{yy_1}{4} = 1$.

Η ε διέρχεται από το Α, αν και μόνο αν $\frac{0 \cdot x_1}{9} + \frac{4y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 1$.

Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, ισχύει ότι

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{9} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και $y_1 = 1$, η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\frac{x\frac{3\sqrt{3}}{2}}{9} + \frac{y \cdot 1}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 3y = 24$$ και για

$x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ και $y_1 = 1$, η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\frac{x\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{9} + \frac{y \cdot 1}{4} = 1 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}x + 3y = 24.$$

20722.α) Η σχέση $(\text{ΚΕ})+(\text{ΚΕ}')=10$ ικανοποιεί τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα Ε΄, Ε και μεγάλο άξονα
$2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$. Επειδή Ε(3,0) και Ε΄(-3,0), είναι γ = 3, οπότε
$\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=25-9=16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=4$.

Η έλλειψη έχει εξίσωση $C: \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

β) Για τα κοινά σημεία των C, ε έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \\ 3x+5y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2+25y^2=400 \\ y=\dfrac{25-3x}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2+25\left(\dfrac{25-3x}{5}\right)^2=400 \ (1) \\ y=\dfrac{25-3x}{5} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 16x^2+\cancel{25}\,\frac{625-150x+9x^2}{\cancel{25}}-400=0 \Leftrightarrow 25x^2-150x+225=0 \Leftrightarrow$$

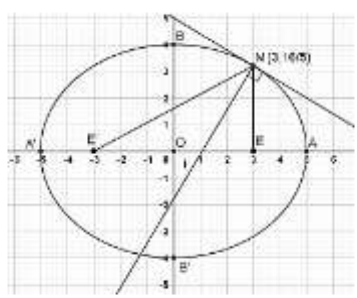
$$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3.$$

Τότε $y=\dfrac{25-3\cdot 3}{5}=\dfrac{16}{5}$. Επομένως η έλλειψη C και η ευθεία ε έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M\left(3,\dfrac{16}{5}\right)$.

γ) Επειδή η εξίσωση από την οποία προέκυψε η τετμημένη του κοινού σημείου Μ είναι 2ου βαθμού με Δ=0, η ευθεία εφάπτεται της έλλειψης στο Μ.

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος της γωνίας $\text{Ε}\hat{\text{Μ}}\text{Ε}'$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη στο Μ. Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\dfrac{3}{5}$, οπότε

$\lambda_\varepsilon\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{5}\lambda_\delta=-1 \Leftrightarrow \lambda_\delta=\dfrac{5}{3}$,



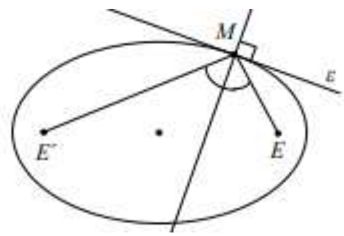
οπότε η διχοτόμος δ έχει εξίσωση: $y-\dfrac{16}{5}=\dfrac{5}{3}(x-3) \Leftrightarrow y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{9}{5}$.

20726.α) Από τον ορισμό της έλλειψης ισχύει ότι $(ΜΕ')+(ΜΕ)=2α$, όμως το άθροισμα $(ΜΕ')+(ΜΕ)$ είναι το μήκος του σχοινιού, οπότε

$2α=10 \Leftrightarrow α=5$. Επειδή γ = 3, είναι $β^2=α^2-γ^2=25-9=16 \overset{β>0}{\Leftrightarrow} β=4$.
Ο μεγάλος άξονας έχει μήκος (ΑΑ΄)=10 και ο μικρός (ΒΒ΄) = 8.

β) C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $ε=\frac{γ}{α}=\frac{3}{5}$.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία Ε ΜΕ ΄, όπου Ε, Ε΄ οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα



ηχητικό κύμα ι μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της C και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου. Σωστή απάντηση η 4).

20666.α) Έστω C: $\frac{x^2}{α^2}+\frac{y^2}{β^2}=1$ η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς. Το σημείο Η είναι εστία της έλλειψης άρα
έχει συντεταγμένες $(-γ,0)$. Τα σημεία Α, Ρ είναι τα άκρα του μεγάλου άξονα, άρα Ρ(- α, 0) και Α(α, 0).
Είναι ΡΗ =147,5 $\Leftrightarrow -γ+α=147,5$ (1) και $ΑΗ=152,5 \Leftrightarrow α+γ=152,5\ (1)$.
Από $(1)+(2) \Rightarrow 2α=300 \Leftrightarrow α=150$ και από την
$(2) \Rightarrow 150+γ=152,5 \Leftrightarrow γ=2,5$.

Είναι $(ΡΑ)=2α=300$ km και $(ΗΕ)=2γ=5$ km, $ε=\frac{γ}{α}=\frac{2,5}{150}=\frac{1}{60}$.

β) Από τον ορισμό της έλλειψης γνωρίζουμε ότι $(ΓΗ)+(ΓΕ)=2α=300$, οπότε το τρίγωνο ΗΓΕ έχει περίμετρο:
$(ΓΗ)+(ΓΕ)+(ΗΕ)=300+5=305$ εκατομμύρια km.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι
$ΗΓΔ=ΕΓΔ$ και επειδή $ΓΔ \perp tt'$, οι γωνίες
$t'\hat{Γ}Η$ και $t\hat{Γ}Ε$ είναι συμπληρωματικές ίσων γωνιών και είναι ίσες.

Υπερβολή

2ο Θέμα

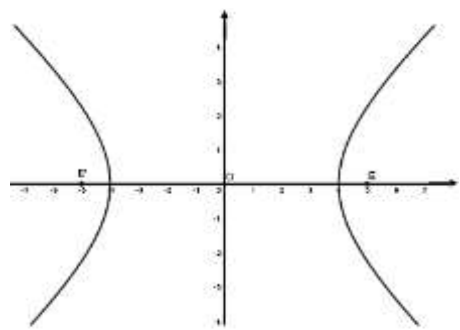
16128.α) Είναι $\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$, $\beta^2 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$ και

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$

Οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με 2α. Έτσι, θα έχουμε ότι $\left|(NE') - (NE)\right| = 2 \cdot 4 = 8$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα $(-4,0)$ και $(4,0)$.



Αν x = 0 τότε $-\dfrac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = -\beta^2$ αδύνατο,

άρα η υπερβολή δεν τέμνει τον y΄y.

17942.α) Η εξίσωση (C) είναι της μορφής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, οπότε είναι υπερβολή.

Είναι $\alpha^2 = 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$, $\beta^2 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 13 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = \sqrt{13}$. Οι εστίες της υπερβολής είναι $E'\left(-\sqrt{13},0\right)$ και $E\left(\sqrt{13},0\right)$.

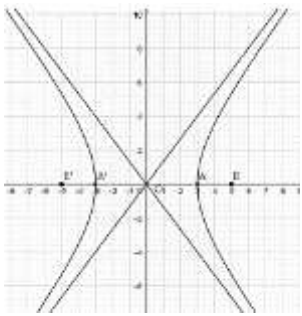
β) Το M ανήκει στην υπερβολή αν και μόνο αν

$\dfrac{1^2}{4} - \dfrac{2022^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9 - 4 \cdot 2022^2 = 36 \Leftrightarrow -4 \cdot 2022^2 = 27$ αδύνατο. Άρα το M δεν είναι σημείο της υπερβολής (C).

20721.α) Είναι $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3,\ \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4$ και
$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$, άρα οι εστίες είναι
Ε΄(- 5, 0) και Ε(5, 0).

β) Γνωρίζουμε ότι οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες
$\varepsilon_1 : y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ και $\varepsilon_2 : y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$, άρα
$\varepsilon_1 : y = \dfrac{4}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = -\dfrac{4}{3}x$.

γ)



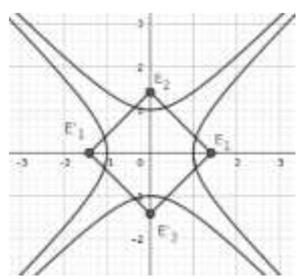
20869.α) Είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 1$ και $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{2}$,
οπότε $E'\left(-\sqrt{2},0\right),\ E\left(\sqrt{2},0\right), \varepsilon_1 : y = x$ και $\varepsilon_2 : y = -x$.

β) Η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α, 0) δηλαδή (1, 0). Επειδή η ζ είναι κάθετη στον x΄x στο Α, έχει εξίσωση x = 1.

γ) Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της ε_1 με τη ζ, οπότε $y = x = 1$, άρα Γ(1,1).

21218.α) Είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ και
$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{2}$, οπότε
$E_1\left(\sqrt{2},0\right),\ E_1'\left(-\sqrt{2},0\right)$.

β) Είναι $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ και
$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{2}$, οπότε
$E_2\left(0,\sqrt{2}\right),\ E_2'\left(0,-\sqrt{2}\right)$.



Στο τετράπλευρο $E_1E_2E_1'E_2'$ οι διαγώνιές; του διχοτομούνται κάθετα, οπότε είναι ρόμβος. Επειδή επιπλέον οι διαγώνιές του είναι ίσες, είναι τετράγωνο.

21649.α) Επειδή η υπερβολή έχει εστίες $E(5,0), E'(-5,0)$, είναι γ =5.

Είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{5}{\alpha} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \alpha = 4$. Είναι

$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 25 - 16 = 9 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 3$.

Επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον x΄x, έχει εξίσωση C:

$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

β) $\varepsilon_1 : y = \frac{\beta}{\alpha} x \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} x$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{3}{4} x$.

γ) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$ έχει εξίσωση:

$$\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Leftrightarrow 5x - 4y = 16.$$

21651.α) Επειδή η υπερβολή έχει εστίες $E(5,0), E'(-5,0)$, είναι γ = 5 και η εξίσωσή της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Επειδή διέρχεται από το σημείο Α, είναι $\frac{4^2}{\alpha^2} - \frac{0^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{\alpha^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 16 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 4$.

Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$.

β) Είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 25 - 16 = 9$, οπότε η εξίσωση της C είναι

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

γ) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ έχει εξίσωση:

$$\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \frac{9}{4}}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1.$$

22169. α) i. Η ασύμπτωτη της υπερβολής είναι η $y=\frac{\beta}{\alpha}x$, άρα

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\beta=\frac{3}{4}\alpha$.

Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 2α, άρα $2\alpha=8\Leftrightarrow\alpha=4$,

οπότε $\beta=\frac{3}{4}\cdot4=3$.

Η εξίσωση της υπερβολής είναι $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

ii. Είναι $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2\Leftrightarrow\gamma^2=16+9=25\overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow}\gamma=5$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία Ε΄(-5,0) και Ε(5,0).

β) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $\left(5,\frac{9}{4}\right)$ έχει εξίσωση:

$$\frac{x\cdot5}{16}-\frac{y\cdot\frac{9}{4}}{9}=1\Leftrightarrow5x-4y=16.$$

22196.α) Η υπερβολή είναι ισοσκελής με $\alpha^2=\beta^2=25\overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha=\beta=5$.

Είναι $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=50\overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow}\gamma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E'\left(-5\sqrt{2},0\right)$ και $E\left(5\sqrt{2},0\right)$.

β) Οι ασύμπτωτες της ισοσκελούς υπερβολής είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: y=x$ και $\varepsilon_2: y=-x$.

γ) Οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ με $\lambda_1\lambda_2=-1\Leftrightarrow\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$, οπότε η μεταξύ τους γωνία είναι ορθή.

22269.α) i. Είναι $\alpha^2=4\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=2$, $\beta^2=1\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta=1$

και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=5\overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow}\gamma=\sqrt{5}$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E'\left(-\sqrt{5},0\right)$ και $E\left(\sqrt{5},0\right)$.

ii. $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Είναι $\varepsilon_1 : y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}x$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{1}{2}x$.

β) Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$ έχει εξίσωση:

$\frac{x \cdot \sqrt{5}}{4} - y \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}x - 2y = 4$.

22051.α) Έχουμε την υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ η οποία γράφεται στην μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με $\alpha = \beta = 1$. Οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι

$(\varepsilon_1): y = \frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = x$ και $(\varepsilon_2): y = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = -x$.

β) Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = 1 \cdot (-1) = -1$ άρα $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

22559.α) Είναι γ = 10, α = 8 και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 100 - 64 = 36 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 6$, οπότε η υπερβολή έχει εξίσωση:

$\frac{x^2}{8^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

β) i. Από τον ορισμό της υπερβολής ισχύει ότι $\left|(ME') - (ME)\right| = 2\alpha = 16$.

ii. $\left|(ME') - (ME)\right| = 16 \Leftrightarrow \left|(ME') - 9\right| = 16 \Leftrightarrow (ME') - 9 = \pm 16 \Leftrightarrow$

$\left((ME') - 9 = -16 \Leftrightarrow (ME') = -7 \text{ αδύνατο}\right)$ ή

$\left((ME') - 9 = 16 \Leftrightarrow (ME') = 25\right)$.

22561.α)i. Η υπερβολή είναι ισοσκελής με $\alpha^2 = \beta^2 = 9 \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta = 3$.
Οι ασύμπτωτες της ισοσκελούς υπερβολής είναι οι ευθείες $\delta_1 : y = x$ και $\delta_2 : y = -x$.

ii. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $A(5,4)$ έχει εξίσωση:

$x \cdot 5 - y \cdot 4 = 9 \Leftrightarrow 5x - 4y = 9$.

β) Είναι $\begin{cases} \varepsilon : 5x - 4y = 9 \\ \delta_1 : y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4x = 9 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow y = x = 9$, άρα κοινό σημείο των ε, δ_1 είναι το (9,9).

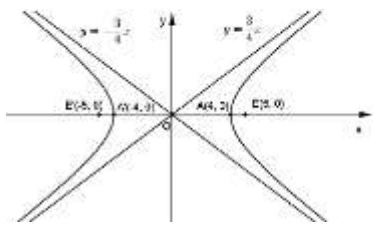
Είναι $\begin{cases} \varepsilon: 5x - 4y = 9 \\ \delta_2: y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4x = 9 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$, άρα κοινό σημείο των ε, δ_2 είναι το (1,- 1).

22567.α) i. Οι κορυφές της υπερβολής είναι τα σημεία Α΄(-α,0) και Α(α,0), άρα α = 4.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$, άρα $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{4} \overset{\alpha=4}{\Leftrightarrow} \beta = 3$.

ii. Είναι $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 16 + 9 = 25 \overset{\gamma>0}{\Leftrightarrow} \gamma = 5$, άρα οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β)



22566. α) $4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Η υπερβολή έχει εστίες στον x΄x . Είναι $\alpha^2 = 1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 1$, άρα οι κορυφές της υπερβολής είναι τα σημεία Α(1,0) και Α΄(-1,0).

β) Είναι $\beta^2 = 4 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = 2$, οπότε οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{2}{1}x = 2x$ και $y = -2x$.

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης y = -2x , και διέρχεται από το Α(1,0) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = - 2, άρα έχει εξίσωση $y - 0 = -2(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.

4ο Θέμα

20653.α) Έστω t sec η χρονική στιγμή που ο παρατηρητής M_2 ακούει το όπλο, τότε η απόσταση του από το P είναι $(PM_2)=340t\ m$. Τον ίδιο ήχο ο παρατηρητής M_1 τον ακούει τη χρονική στιγμή $t+4$ sec και η απόσταση του από το P είναι

$(PM_1)=340(t+4)\ m \Leftrightarrow (PM_1)=360t+1360 \Leftrightarrow$

$(PM_1)=(PM_2)+1360 \Leftrightarrow (PM_1)-(PM_2)=1360$.

β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι $\left|(PM_1)-(PM_2)\right|=2\alpha$ και επειδή $(PM_1)>(PM_2)$

είναι $(PM_1)-(PM_2)=1360$. Επομένως το P βρίσκεται στο δεξιό κλάδο υπερβολής που έχει εστίες τα

M_1, M_2 και $2\alpha=1360 \Leftrightarrow \alpha=680$.

γ) Είναι $(M_1M_2)=1378 \Leftrightarrow 2\gamma=1378 \Leftrightarrow \gamma=689$.

Είναι $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=689^2-680^2=(689-680)(689+680)=9\cdot 1369 \Leftrightarrow$

$\gamma=\sqrt{9\cdot 1369}=3\cdot 37=111$.

Επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον x΄x, η εξίσωσή της είναι:

$$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{111^2}=1.$$

22174. α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι

$(AA')=2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma}{5}$, άρα $\frac{\gamma}{5}=0,6 \Leftrightarrow \gamma=3$.

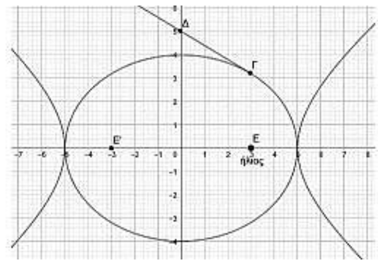
Είναι $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=25-9=16 \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta=4$, οπότε η έλλειψη έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

β) i. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Γ έχει εξίσωση:

$$\frac{x\cdot 3}{25}+\frac{y\cdot\frac{16}{5}}{16}=1\Leftrightarrow\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1\Leftrightarrow 3x+5y=25$$. Για να διέρχεται αυτή η ευθεία από το σημείο Δ, πρέπει και αρκεί $3\cdot 0+5\cdot 5=25\Leftrightarrow 25=25$ ισχύει. Άρα η εφαπτομένη στο Γ διέρχεται από το Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Είναι



$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1\\[2mm] \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$2\frac{x^2}{25}=2\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=\pm 5.$$

Για $x=\pm 5$ είναι $\frac{25}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Leftrightarrow\frac{y^2}{16}=0\Leftrightarrow y=0$.

Σημεία συνάντησης είναι τα (5,0) και (- 5, 0).

21657.α) i. Επειδή το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής είναι τετράγωνο, είναι α = β , οπότε οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες y = x και y = -x.

ii. Είναι $\varepsilon^2=1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=2\overset{\varepsilon>0}{\Leftrightarrow}\varepsilon=\sqrt{2}$.

β) Η υπερβολή έχει εξίσωση C: $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Επειδή διέρχεται από το σημείο (2,0), είναι $2^2 - 0 = \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$, άρα C: $x^2 - y^2 = 4$.
Η ευθεία (ζ) επειδή είναι παράλληλη σε μία από τις ασύμπτωτες, θα έχει εξίσωση της μορφής ε: $y = x + k$ ή $y = -x + k$, $k \neq 0$.
i. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των ε, C προκύπτουν από τα συστήματα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = x + k \end{cases}, \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = -x + k \end{cases}$.

Είναι $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = x + k \end{cases} \Rightarrow x^2 - (x + k)^2 = 4 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2kx - k^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x = -\dfrac{k^2 + 4}{2k}$ και $y = -\dfrac{k^2 + 4}{2k} + k = -\dfrac{3k^2 + 4}{2k}$, άρα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο .

Όμοια $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = -x + k \end{cases} \Rightarrow x^2 - (x + k)^2 = 4 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2kx - k^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{k^2 + 4}{2k}$ και $y = -\dfrac{k^2 + 4}{2k} + k = -\dfrac{3k^2 + 4}{2k}$, άρα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο . Επομένως σε κάθε περίπτωση οι ε, C έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
ii. Επειδή το μοναδικό κοινό σημείο έχει προκύψει από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι 2ου βαθμού, η ευθεία δεν εφάπτεται της υπερβολής.

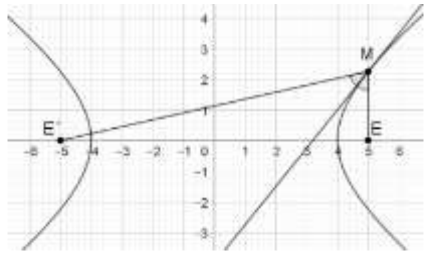
32206.α) Από τον ορισμό της υπερβολής ισχύει ότι

$$2\alpha = \left|(ME') - (ME)\right| = \left|\sqrt{(5+5)^2 + \left(\frac{9}{4} - 0\right)^2} - \sqrt{(5-5)^2 + \left(\frac{9}{4} - 0\right)^2}\right| \Leftrightarrow$$

$$2\alpha = \left|\sqrt{100 + \frac{81}{16}} - \frac{9}{4}\right| = \left|\sqrt{\frac{1681}{16}} - \frac{9}{4}\right| = \left|\frac{41}{4} - \frac{9}{4}\right| = \frac{32}{4} = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Επειδή οι εστίες είναι τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$, είναι γ = 5. Είναι $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{5}{4}$.

β) $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = 25 - 16 = 9 \Leftrightarrow \beta = 3$, άρα C: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.



γ) Η διχοτόμος της γωνίας $E\hat{M}E'$ είναι η εφαπτομένη της υπερβολής στο Μ, οπότε έχει εξίσωση:

$$\frac{x\cdot 5}{16}-\frac{y\cdot \frac{9}{4}}{9}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5x}{16}-\frac{y}{4}=1 \Leftrightarrow 5x-4y=16 .$$

δ) Οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : y=\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 4y=3x \Leftrightarrow -3x+4y=0 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2 : y=-\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 4y=-3x \Leftrightarrow 3x+4y=0 .$$

Έστω $\vec{\delta}_1$ διάνυσμα παράλληλο στην ε_1, τότε $\vec{\delta}_1=(4,3)$ και $\vec{\delta}_2$ διάνυσμα παράλληλο στην ε_2, τότε $\vec{\delta}_2=(4,-3)$.

Είναι $\text{συν}\left(\vec{\delta}_1,\hat{\ }\vec{\delta}_2\right)=\dfrac{4\cdot 4+3\cdot(-3)}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{7}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}=\dfrac{7}{25}$, οπότε το

συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές είναι $\dfrac{7}{25}$.

3ο Θέμα

17944.α) Ισχύει ότι η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{7}$.
Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει ότι

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 2 .$$

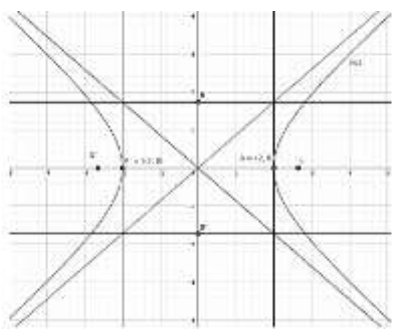
Είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{3}$.

β) i) Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Α(2 , 0) , Α' (−2, 0).

ii) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $\varepsilon_1 : y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ και

$$\varepsilon_2 : y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x .$$

γ) Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



1ο Θέμα

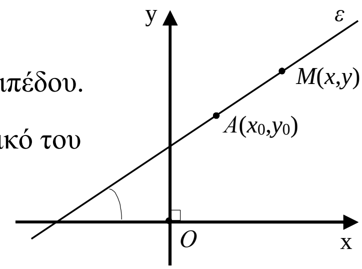
21973.α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

β) Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων

στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.

Έστω ένα δεύτερο σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας ε. Είναι

$\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και $\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.



Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\overrightarrow{AM} \parallel \varepsilon, \Leftrightarrow \lambda_{AM} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \Leftrightarrow$

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$. Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται και από το σημείο

$A(x_0, y_0)$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι: $y - y_o = \lambda(x - x_o)$.